DEPARTAMENTO DE FÍSICA · **UDESC**

SEMINÁRIO · **2026**

RAY TRACING EM ESTRELAS RELATIVÍSTICAS

Da geometria à *observação*



Como a curvatura do espaço-tempo decide a *imagem*, o *espectro* e a *curva de luz* que um telescópio de raios X recebe de uma estrela de nêutrons.

$$\psi(b) = \int du \,/\, \sqrt{(b^{-2} - u^2(1 - R_s u))}$$ A LUZ QUE DEIXA A SUPERFÍCIE

Rafael C. R. de Lima

Departamento de Física · UDESC/CCT · Joinville

rafael-lima.pages.dev/talks

ROTEIRO

Quatro partes, *um caminho*

I

A estrela por dentro

O que segura uma estrela de nêutrons: a equação TOV, a equação de estado e a curva massa–raio.

II

Ray tracing relativístico

Geodésicas nulas em Schwarzschild: o desvio da luz, o redshift e os atrasos — e como seguir os raios de trás para a frente, do telescópio até a superfície.

III

Pulsares e estrelas de nêutrons

Os laboratórios: pulsares e magnetares, manchas quentes, rotação, atmosferas — e o que o NICER já mediu.

IV

Resultados recentes

Meus trabalhos: curvas de luz de magnetares, um magnetar massivo de campo baixo, colunas de acreção — e testes de teorias alternativas da gravidade.

A PREMISSA

Tudo o que sabemos chega *em fótons*

Estrelas compactas são *laboratórios naturais* de gravitação em campo forte — mas só as conhecemos pelos fótons que saíram delas e atravessaram um espaço-tempo curvo.

métrica → geodésicas nulas → imagem · espectro · curva de luz → telescópio → **M, R, campo, gravidade**

O PROBLEMA DIRETO

Dada a estrela e a métrica, prever o que se observa. É o **ray tracing**.

O PROBLEMA INVERSO

Dado o que se observa, inferir massa, raio, geometria das manchas e campo magnético.

O TESTE

Se a métrica não for a de Schwarzschild, as curvas de luz mudam: a observação testa a **gravidade**.

I

PARTE UM

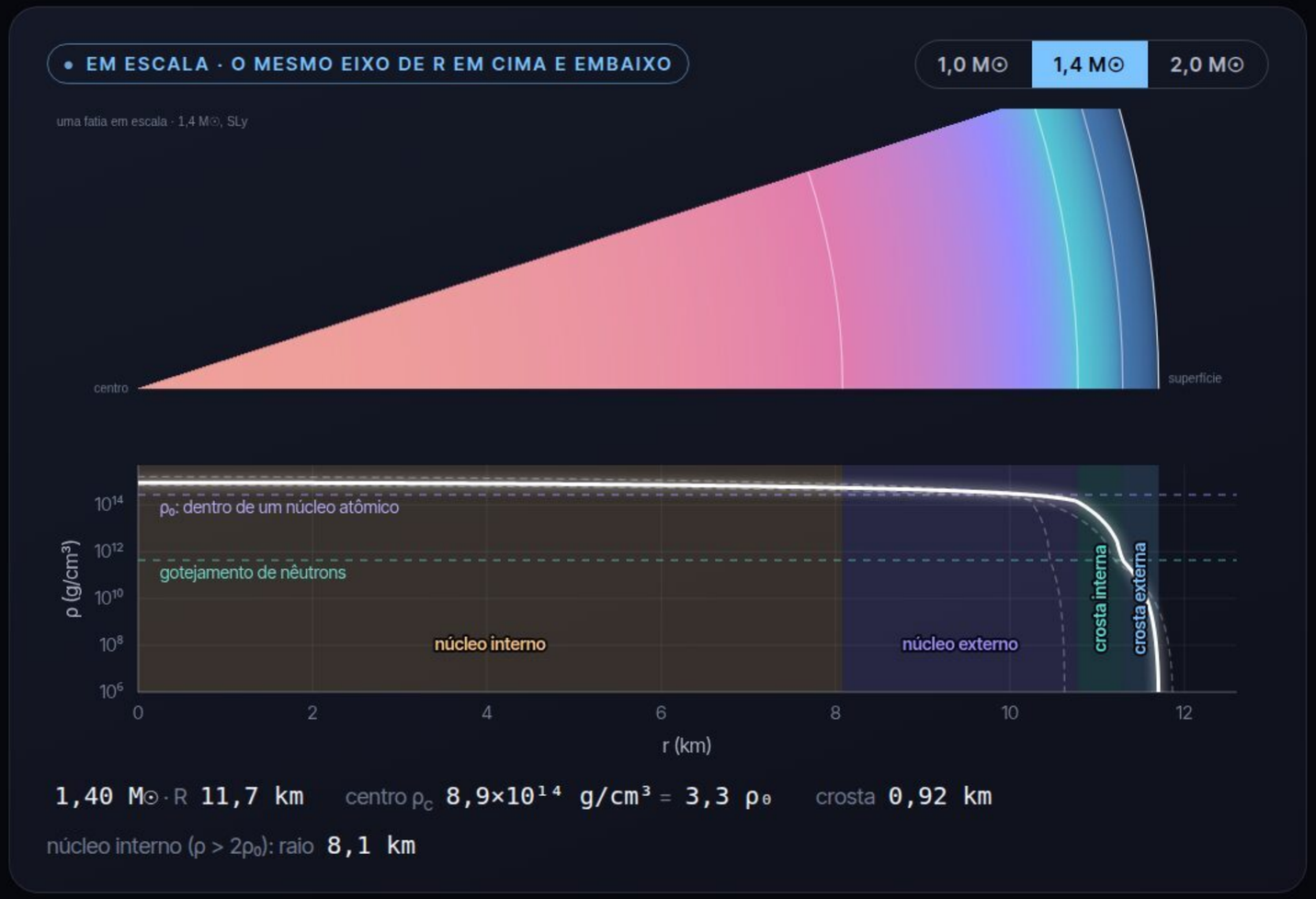
A estrela *por dentro*

Antes de seguir a luz, a fonte: o que segura mais de uma massa solar em 12 km — a pressão da matéria mais densa que conhecemos, contra a gravidade da relatividade geral.

anatomia · equilíbrio TOV · equação de estado · massa e raio



Da crosta *ao núcleo desconhecido*



- **Atmosfera e oceano**: de centímetros a metros de H, He ou C — de onde sai a luz da Parte II.
- **Crosta externa**: uma rede de núcleos cada vez mais ricos em nêutrons, num mar de elétrons, até 4×10^{11} g/cm³, quando os nêutrons começam a escapar dos núcleos.
- **Crosta interna**: núcleos e nêutrons livres, superfluidos; na base, a "pasta nuclear". Até ~$\rho_0/2$.
- **Núcleo externo**: nêutrons, com alguns prótons, elétrons e múons, até ~$2\rho_0$.
- **Núcleo interno**: até ~$6\rho_0$. Híperons? Quarks livres? Quem decide é a **equação de estado**.

$\rho_0 = 2{,}7\times10^{14}$ g/cm³ é a densidade dentro de um núcleo atômico. Perfil da TOV com a SLy (Douchin & Haensel 2001, nos politropos de Read et al. 2009).

TOLMAN · OPPENHEIMER & VOLKOFF · 1939

Equilíbrio hidrostático *na relatividade geral*

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

NEWTON · $dm/dr = 4\pi r^2\rho$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}\left(1+\frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right)\left(1-\frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}$$

A EQUAÇÃO TOV · $\rho c^2 = \varepsilon$, A DENSIDADE DE ENERGIA

A PRESSÃO TEM INÉRCIA

Pressão é energia, e energia resiste a ser acelerada como massa. No centro desta estrela: **×1,15**

A PRESSÃO GRAVITA

A pressão também é fonte de gravidade e soma-se à massa. No centro: **×1,46**

O ESPAÇO SE CURVA

As distâncias radiais se esticam, e o fator cresce para fora. Na superfície: **×1,54**

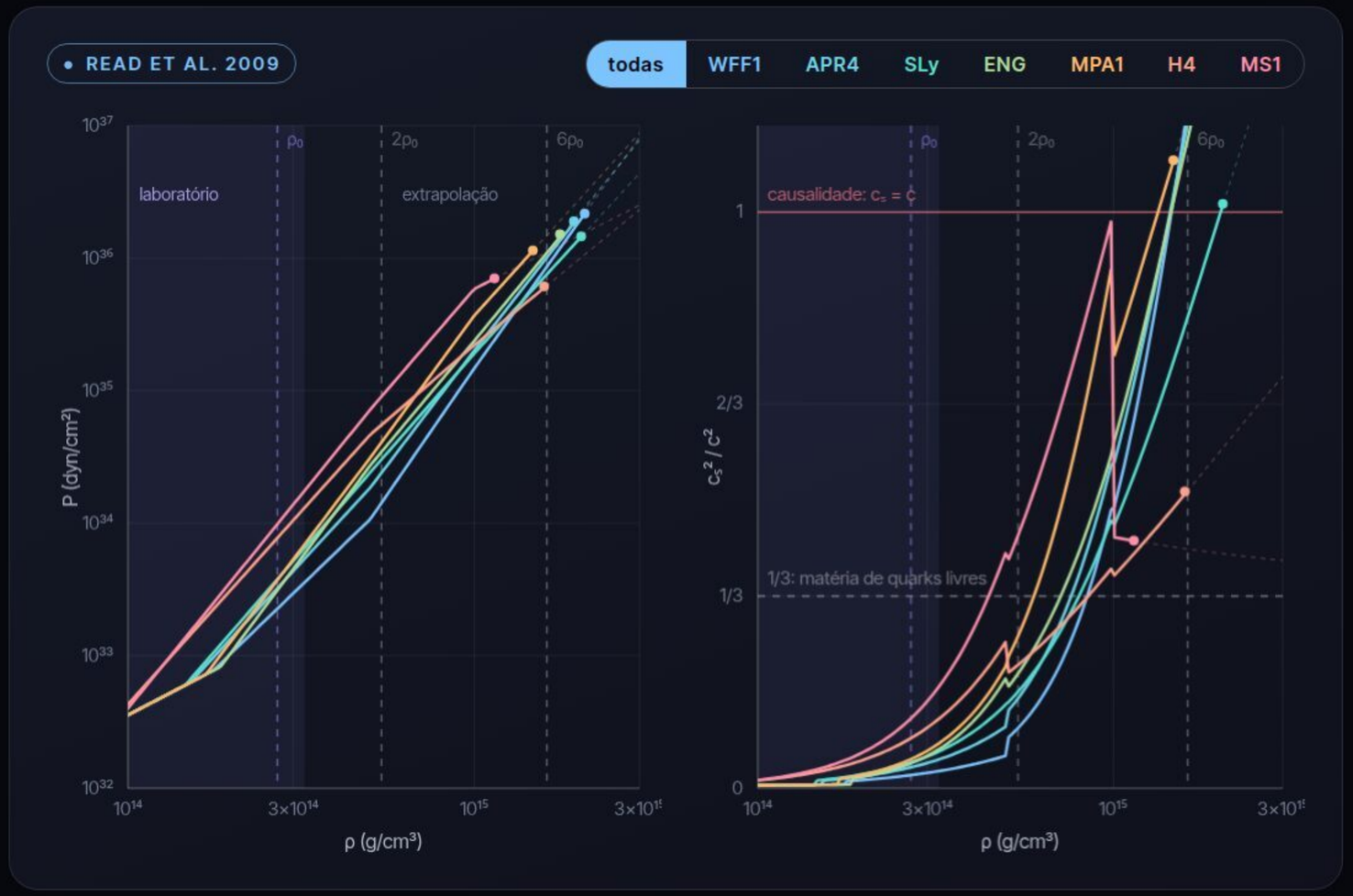
Mais pressão, mais gravidade: apertar mais não basta, e surge uma **massa máxima** — que Newton não tem.



densidade central, ρ_c · SLy — $8{,}9\times10^{14}$ g/cm³

TOV 1,40 M⊙, 11,7 km Newton 3,11 M⊙, 15,2 km no centro $P/\rho c^2$ 0,154 $2GM/Rc^2$ 0,353

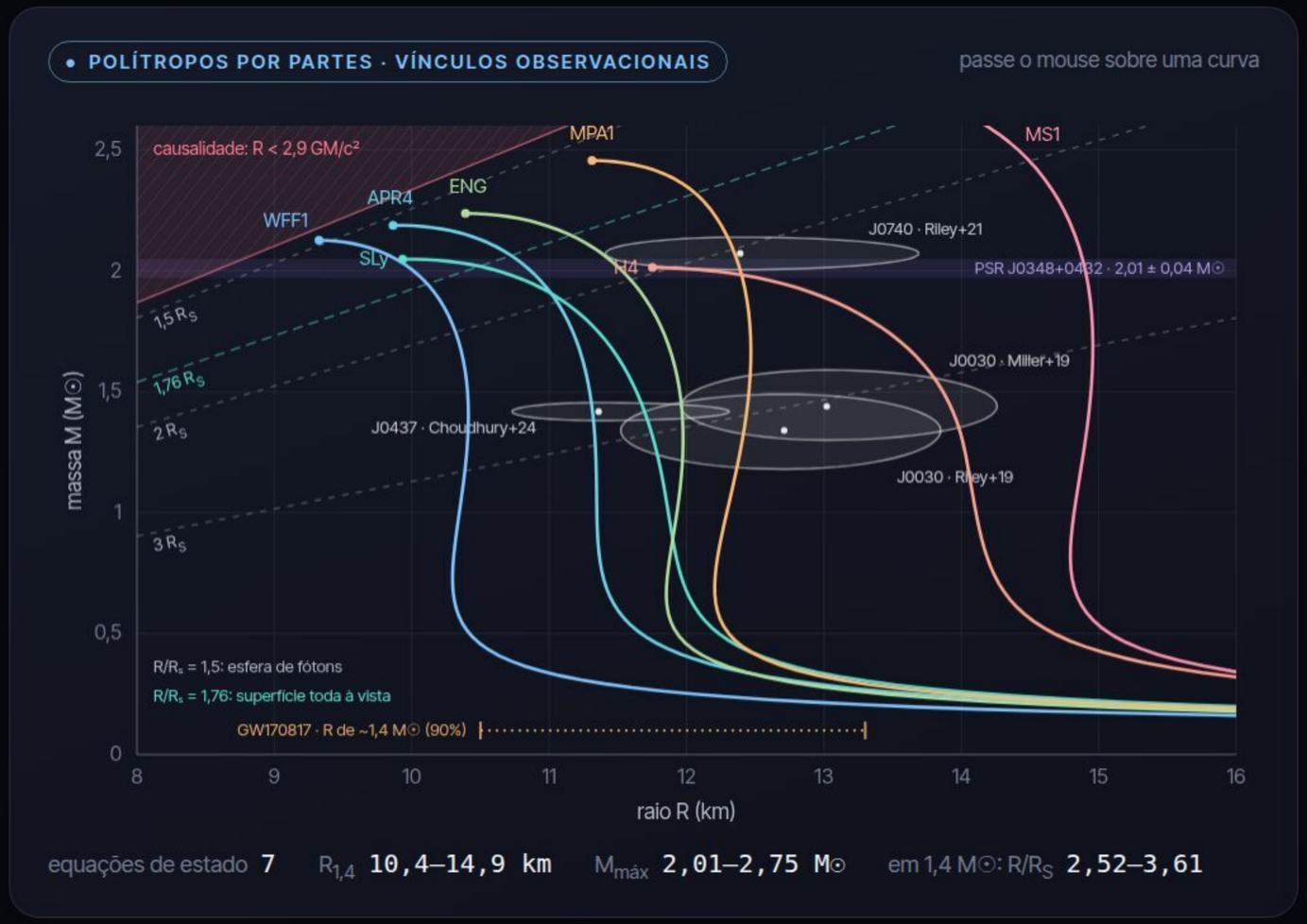
Quanto a matéria *resiste a ser apertada*



- A equação de estado dá a **pressão em função da densidade**, P(ρ): é o que falta para a TOV fechar.
- Até ~ρ_0 a física nuclear de laboratório vincula a curva; acima, cada modelo extrapola: forças de dois e três núcleons (WFF1, APR4), Skyrme (SLy), Brueckner–Hartree–Fock relativístico (ENG, MPA1), campo médio relativístico (MS1; H4, com híperons).
- **Dura** — mais pressão na mesma densidade — dá estrela maior e mais pesada; **macia**, menor e mais leve.
- Limites: o som não corre mais que a luz, e pulsares de 2 M☉ eliminam as macias demais.

$c_s^2/c^2 = \Gamma P/(\varepsilon + P)$. O ponto marca o centro da estrela de massa máxima; depois dele, a curva fica apagada. Os saltos vêm do ajuste por politropos, que muda Γ em $10^{14,7}$ e 10^{15} g/cm³; perto do centro das estrelas mais pesadas, alguns ajustes passam de *c*.

Da física nuclear *à curva M–R*



$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(\varepsilon + P)(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{c^2\, r(r - 2Gm/c^2)}$$

EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO RELATIVÍSTICO (TOV)

Cada equação de estado P(ε) dá uma curva massa–raio e uma massa máxima. Medir **massa e raio da mesma estrela** escolhe entre elas.

As retas de compacidade constante antecipam a Parte II: abaixo de $R = 1{,}76\ R_S$ a superfície inteira fica à vista; em $1{,}5\ R_S$ está a esfera de fótons.

Politropos por partes de Read, Lackey, Owen & Friedman (2009); vínculos (68%): NICER — Riley et al. 2019, 2021; Miller et al. 2019; Choudhury et al. 2024; PSR J0348+0432 (Antoniadis et al. 2013); GW170817 (Abbott et al. 2018).

II

PARTE DOIS

Ray tracing *relativístico*

Perto de uma massa a luz não anda em linha reta: segue as geodésicas nulas da métrica. Ray tracing é seguir essas geodésicas de trás para a frente — do telescópio até a fonte.

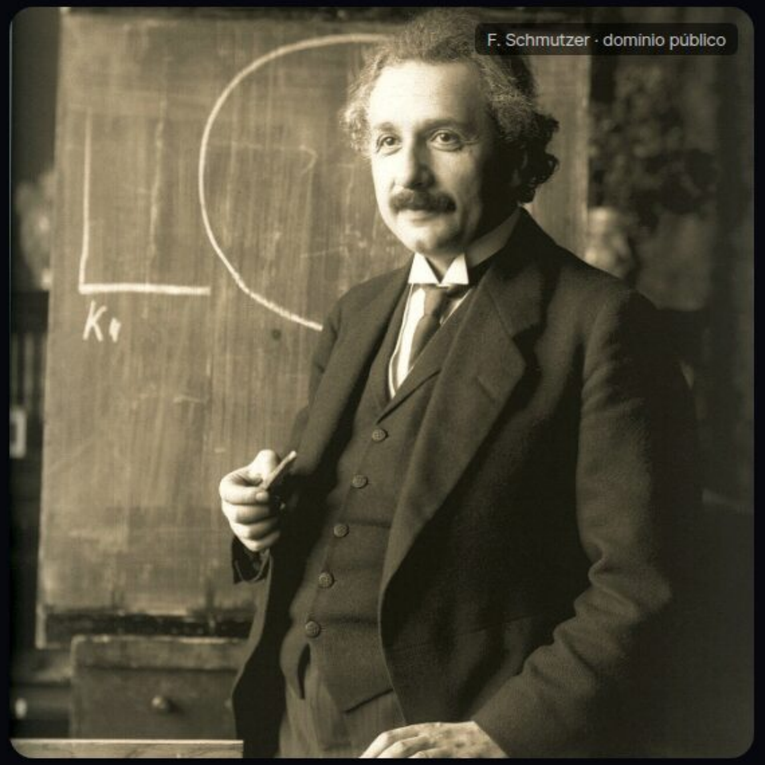
geodésicas nulas · desvio da luz · redshift · a imagem de uma estrela compacta · a receita



SMACS 0723 (JWST) · NASA, ESA, CSA, STScI · domínio público

25 DE NOVEMBRO DE 1915

Einstein e *suas equações de campo*



Albert Einstein
1921

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

CURVATURA = CONTEÚDO DE ENERGIA E MOMENTO

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

GEODÉSICA

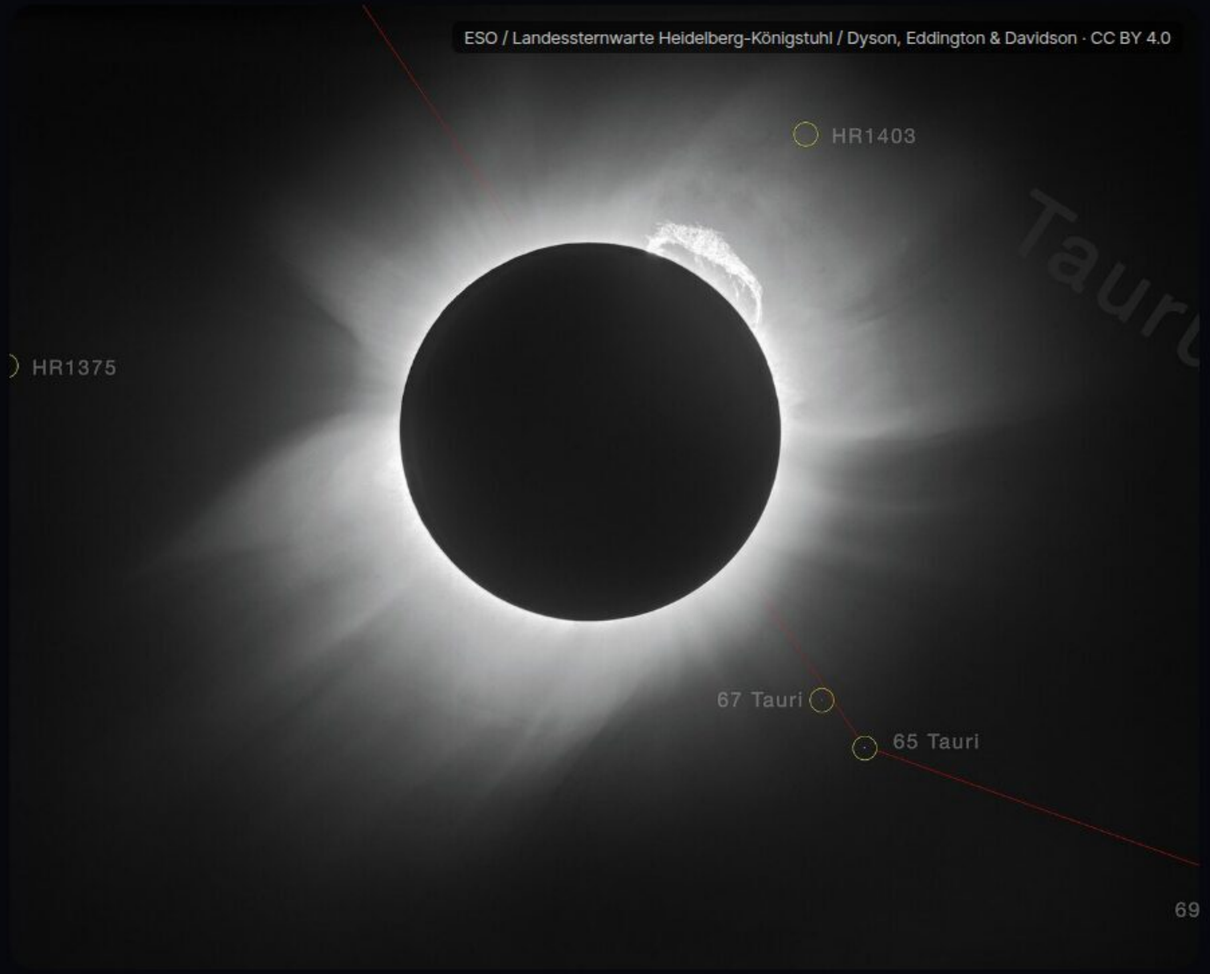
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

A MÉTRICA É O CAMPO

> *"O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar."*
>
> John A. Wheeler

OS TESTES CLÁSSICOS

Sobral, 1919: a luz *faz curva*



EFEITO	RG PREVÊ
periélio de Mercúrio (1915)	43″ / século
desvio da luz rasante ao Sol (1919)	1,75″
desvio para o vermelho, Pound–Rebka (1959)	$2{,}5\times10^{-15}$ em 22,5 m
atraso de Shapiro (1964)	~200 µs
relógios do GPS	+38 µs / dia

Expedição de Sobral (CE): **1,98 ± 0,12″**. Príncipe: 1,61 ± 0,30″. O céu do Nordeste confirmou Einstein.

SOBRAL, 29 DE MAIO DE 1919 · A MEDIDA

Duas chapas, *o mesmo céu*



Noite: as Híades fotografadas em julho, antes do amanhecer, com o mesmo telescópio — o Sol longe dali.

Eclipse: o mesmo campo em 29 de maio, com a Lua cobrindo o Sol. Cada estrela se afasta do Sol, na direção radial.

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 b} = 1{,}75'' \, \frac{R_\odot}{b}$$

O DOBRO DA CONTA NEWTONIANA

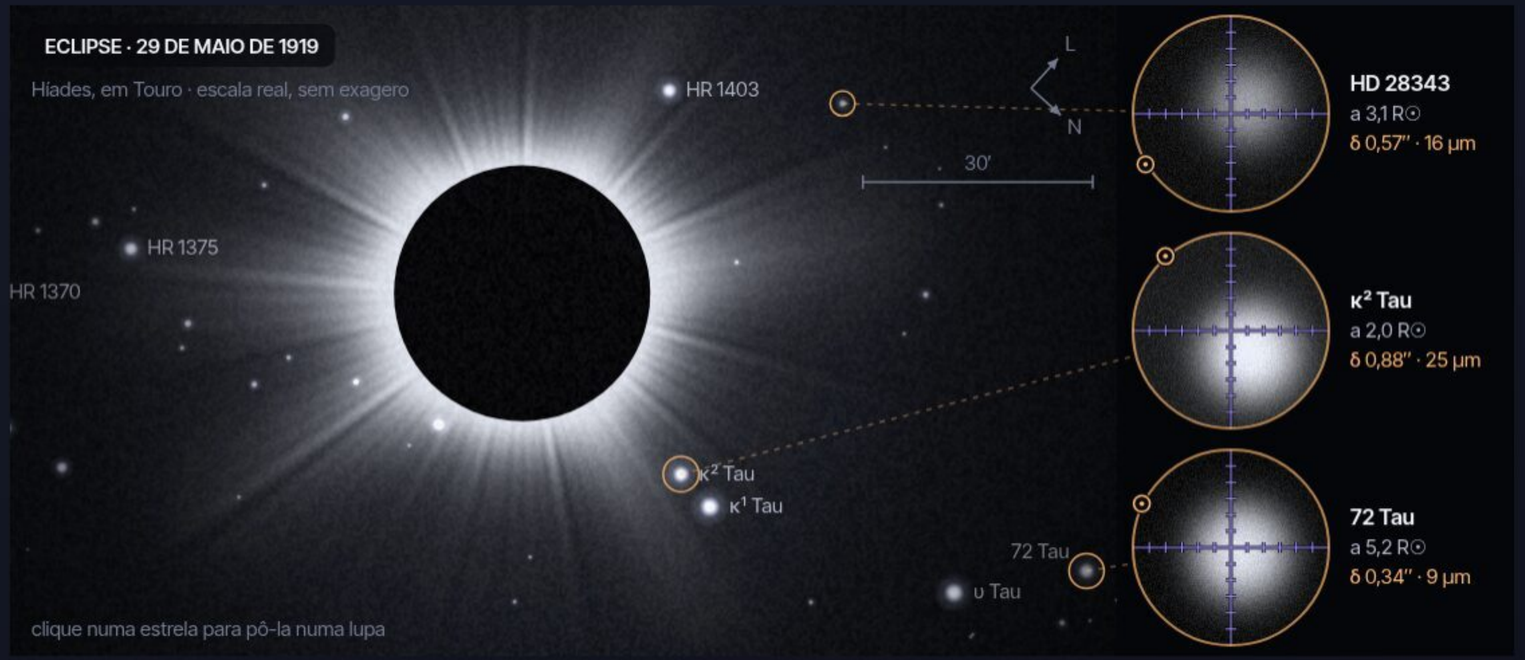
Na chapa inteira nada se mexe: 1″ é um décimo de pixel. Nas lupas, em escala real, como no micrômetro, a estrela pula uma fração da própria largura — e o centro de uma mancha se mede bem melhor que a largura dela.

SOBRAL, 29 DE MAIO DE 1919 · A MEDIDA

Duas chapas, *o mesmo céu*

CHAPA SIMULADA · ESCALA REAL

piscar | noite | eclipse | as duas



largura da imagem da estrela 2,0″

previsão: Einstein | Newton

na chapa da lente de 4 pol. 1″ = 28 µm na tela 1″ = 0,10 px, na lupa 24 px Sobral mediu 1,98 ± 0,12″

Noite: as Híades fotografadas em julho, antes do amanhecer, com o mesmo telescópio — o Sol longe dali.

Eclipse: o mesmo campo em 29 de maio, com a Lua cobrindo o Sol. Cada estrela se afasta do Sol, na direção radial.

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 b} = 1{,}75'' \, \frac{R_\odot}{b}$$

O DOBRO DA CONTA NEWTONIANA

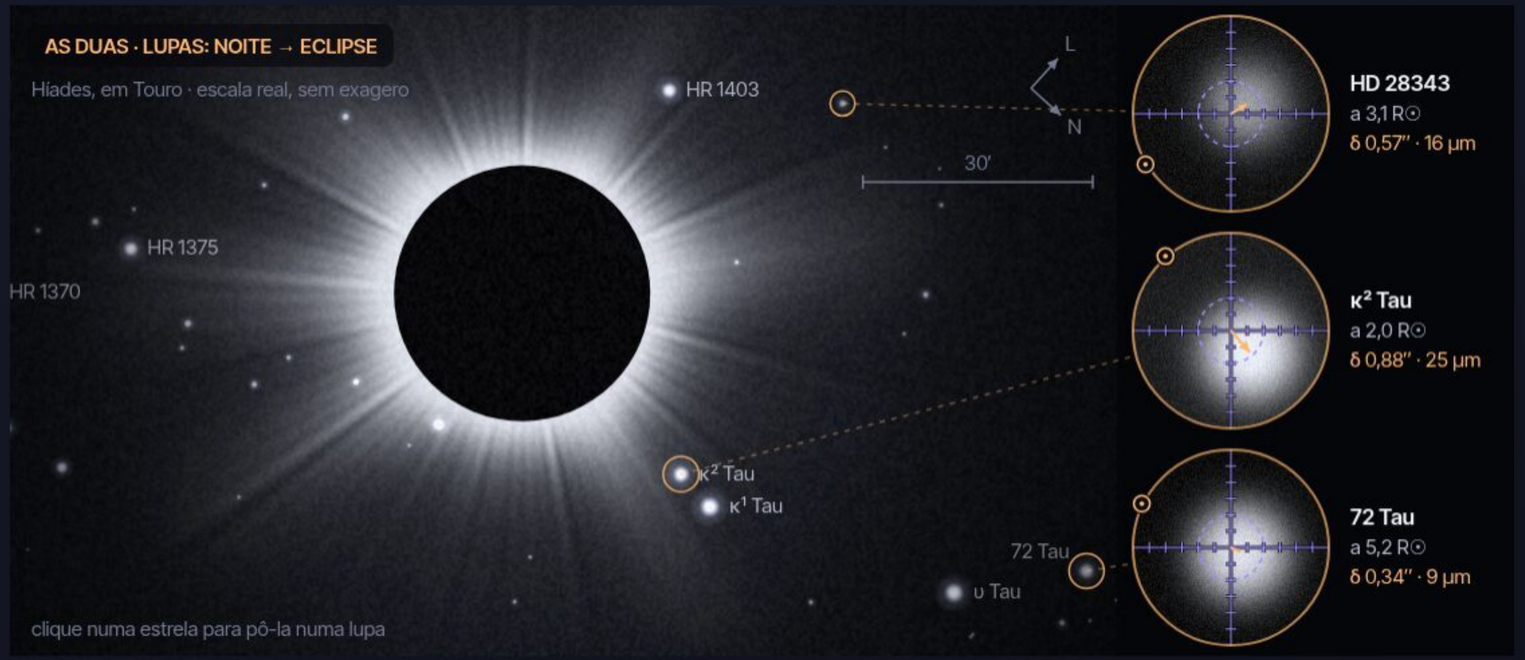
Na chapa inteira nada se mexe: 1″ é um décimo de pixel. Nas lupas, em escala real, como no micrômetro, a estrela pula uma fração da própria largura — e o centro de uma mancha se mede bem melhor que a largura dela.

SOBRAL, 29 DE MAIO DE 1919 · A MEDIDA

Duas chapas, *o mesmo céu*

CHAPA SIMULADA · ESCALA REAL

piscar | noite | eclipse | **as duas**



largura da imagem da estrela 2,0″

previsão: **Einstein** | Newton

na chapa da lente de 4 pol. 1″ = 28 μm na tela 1″ = 0,10 px, na lupa 24 px Sobral mediu 1,98 ± 0,12″

Noite: as Híades fotografadas em julho, antes do amanhecer, com o mesmo telescópio — o Sol longe dali.

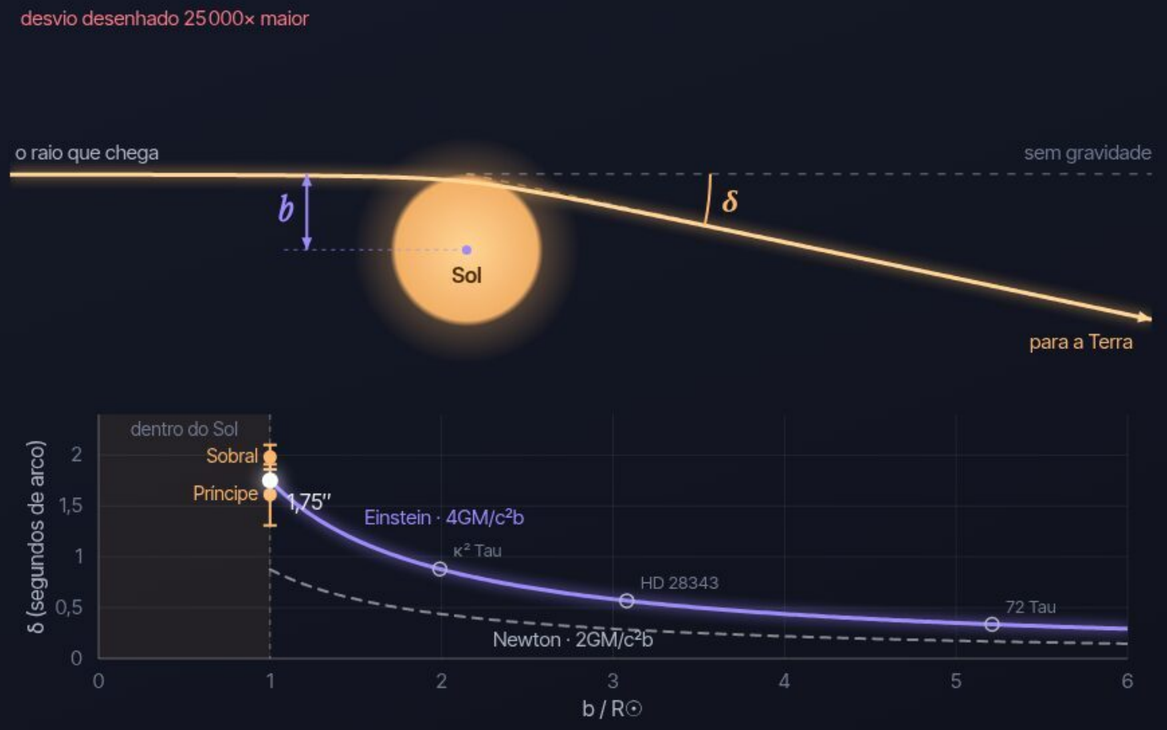
Eclipse: o mesmo campo em 29 de maio, com a Lua cobrindo o Sol. Cada estrela se afasta do Sol, na direção radial.

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 b} = 1{,}75'' \, \frac{R_\odot}{b}$$

O DOBRO DA CONTA NEWTONIANA

Na chapa inteira nada se mexe: 1″ é um décimo de pixel. Nas lupas, em escala real, como no micrômetro, a estrela pula uma fração da própria largura — e o centro de uma mancha se mede bem melhor que a largura dela.

De onde vem *o 1,75″*



$$\delta = \frac{4GM_\odot}{c^2 b} = \frac{2r_s}{b}$$

b: DO CENTRO DO SOL À RETA DO RAIO QUE CHEGA

$$\left[\frac{GM}{c^2 b}\right] = \frac{(\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}})(\mathrm{kg})}{(\mathrm{m^2\,s^{-2}})(\mathrm{m})} = 1$$

ADIMENSIONAL: O ÂNGULO SAI EM RADIANOS

$$b = R_\odot:\ \delta = \frac{5{,}91\,\mathrm{km}}{6{,}96\times10^5\,\mathrm{km}} = 8{,}49\times10^{-6}\,\mathrm{rad}$$

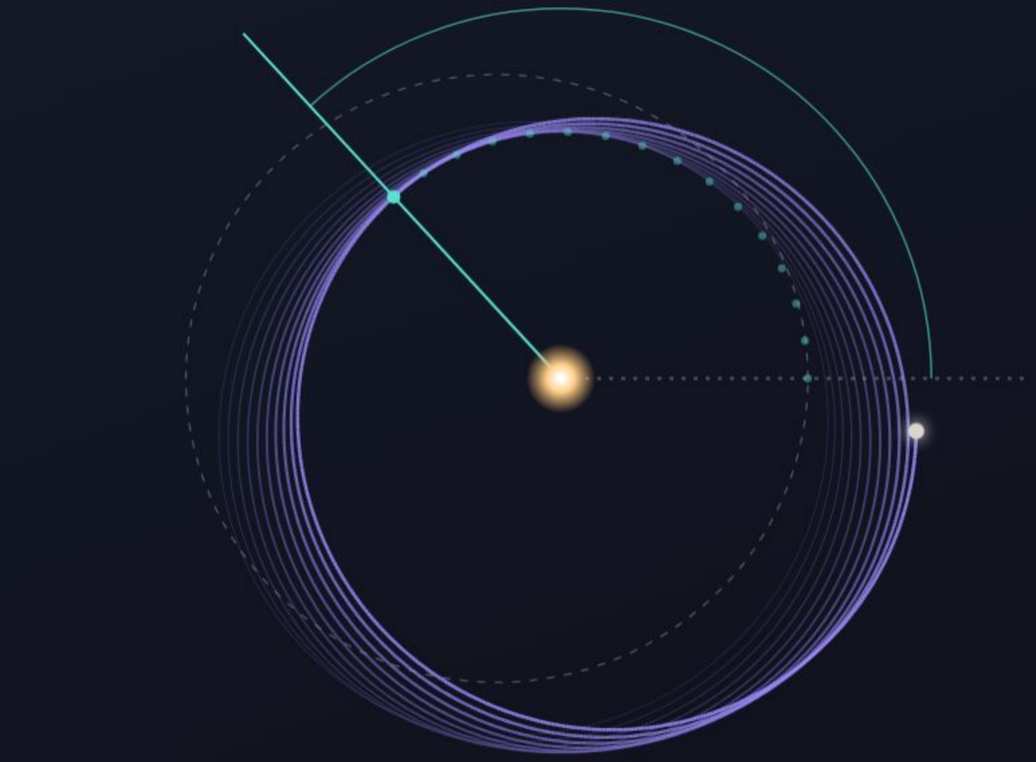
$4GM_\odot/c^2$ = 5,91 km: O DOBRO DO r_s DO SOL

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180}{\pi}\times 3600'' \approx 206\,265'' \ \rightarrow\ \delta \approx 1{,}75''$$

NEWTON, COM A LUZ COMO PARTÍCULA: A METADE, 0,87″

1859 – 1915 · O PERIÉLIO DE MERCÚRIO

Mercúrio *não fecha a órbita*



AVANÇO DO PERIÉLIO	POR SÉCULO
observado (relativo às estrelas)	574″
outros planetas, por Newton	531″
sobra sem explicação	43″

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi G M_\odot}{c^2\, a(1-e^2)} = 0{,}104'' \text{ por órbita}$$

RG · EINSTEIN, NOVEMBRO DE 1915 · 415 ÓRBITAS POR SÉCULO → 43,0″

Le Verrier encontrou a sobra em 1859 e propôs um planeta escondido, Vulcano. Nunca foi achado. Einstein obteve os 43″ sem nenhum parâmetro ajustável.

> *"Por alguns dias, fiquei fora de mim de excitação alegre."*
>
> Einstein a Ehrenfest, janeiro de 1916

DEZEMBRO DE 1915 · FRONT RUSSO

Schwarzschild e a *primeira solução exata*



Karl Schwarzschild

1873 – 1916

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 d\Omega^2$$

$r_s = 2GM/c^2$ · VALE FORA DE QUALQUER CORPO ESFÉRICO SEM ROTAÇÃO

$1\ r_s$	$1{,}5\ r_s$	$3\ r_s$	$2{,}95$ km
horizonte de eventos	esfera de fótons	ISCO: última órbita estável	r_s do Sol (Terra: 8,9 mm)

Escreveu a Einstein em 22 de dezembro de 1915, servindo como artilheiro. Morreu em maio de 1916.

O QUE NOS INTERESSA DA MÉTRICA

A curvatura faz *três coisas* com um fóton

1 · ENCURVA O CAMINHO

O fóton segue uma **geodésica nula**. Perto da superfície de uma estrela de nêutrons o desvio é de dezenas de graus: vemos **mais da metade** da estrela.

2 · MUDA A ENERGIA

Um fóton emitido em r com energia local E chega ao infinito com

$$E_\infty = E\sqrt{(1 - R_S/r)}$$

REDSHIFT GRAVITACIONAL

3 · ATRASA

Caminhos diferentes levam tempos diferentes (atraso de Shapiro): os fótons de cada ponto da estrela chegam com dezenas de microssegundos de diferença.

Ray tracing é juntar as três numa conta só, **pixel a pixel**, para cada instante da rotação.

Numa estrela de nêutrons, $R \approx 2{,}5\text{–}3\ R_S$: nenhum dos três efeitos é correção pequena.

E os três dependem só da métrica fora da estrela — por isso uma curva de luz carrega informação sobre a gravidade.

Duas constantes *e um potencial*

A métrica não depende de t nem de ϕ: energia e momento angular se conservam.

$$E = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\dot{t} \qquad L = r^2\,\dot{\varphi}$$

Para a luz só importa a razão, o **parâmetro de impacto** $b = L/E$:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\dot{r}^2}{L^2} + V(r), \quad V = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

UM "POTENCIAL" SÓ DA GEOMETRIA

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2(1 - R_S u)$$

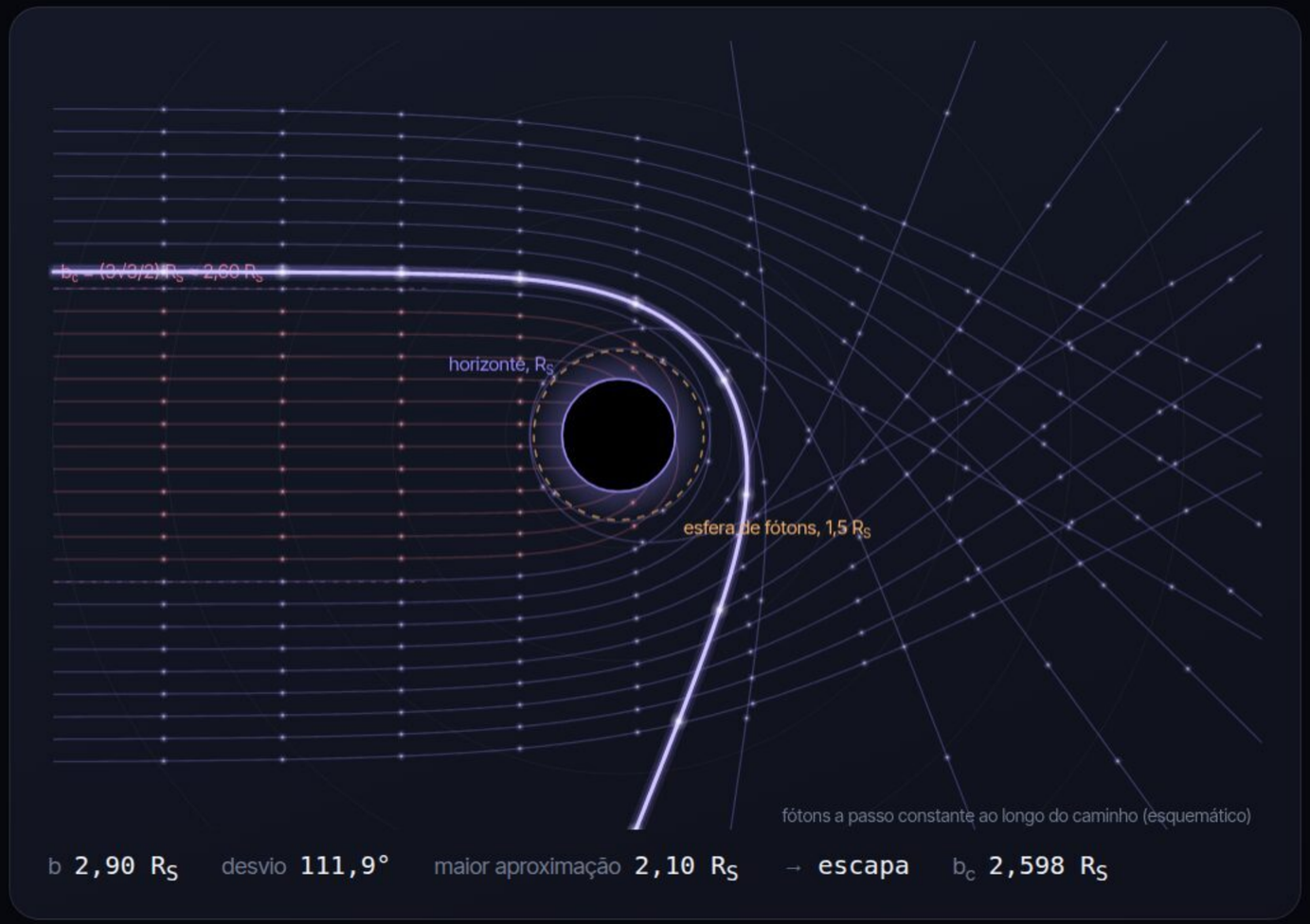
A ÓRBITA · $u = 1/r$

O máximo de V fica em $r = 1{,}5\ R_S$: a **esfera de fótons**. Abaixo de $b_c = (3\sqrt{3}/2)\ R_S$ o raio vem do horizonte — ou da estrela.



GEODÉSICAS DE SCHWARZSCHILD

Como a luz *se curva*



$$u'' + u = \frac{3}{2} R_S u^2$$

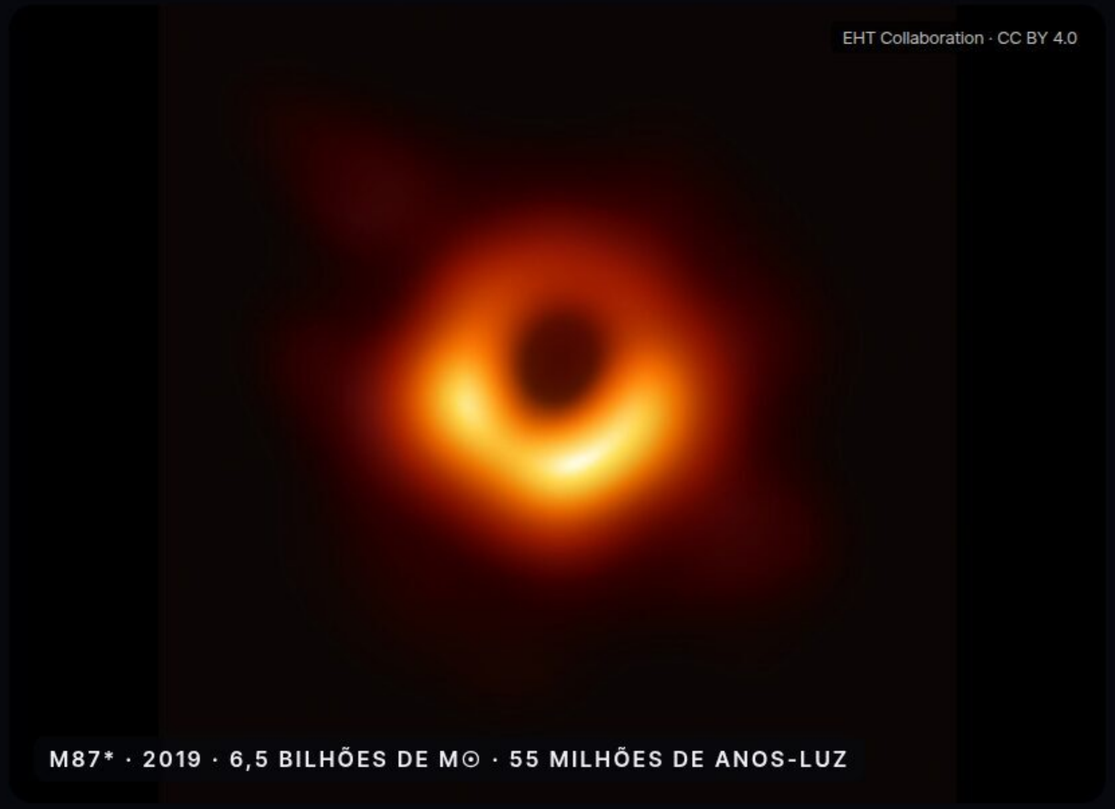
$u = 1/r$ · EQUAÇÃO DA ÓRBITA DA LUZ

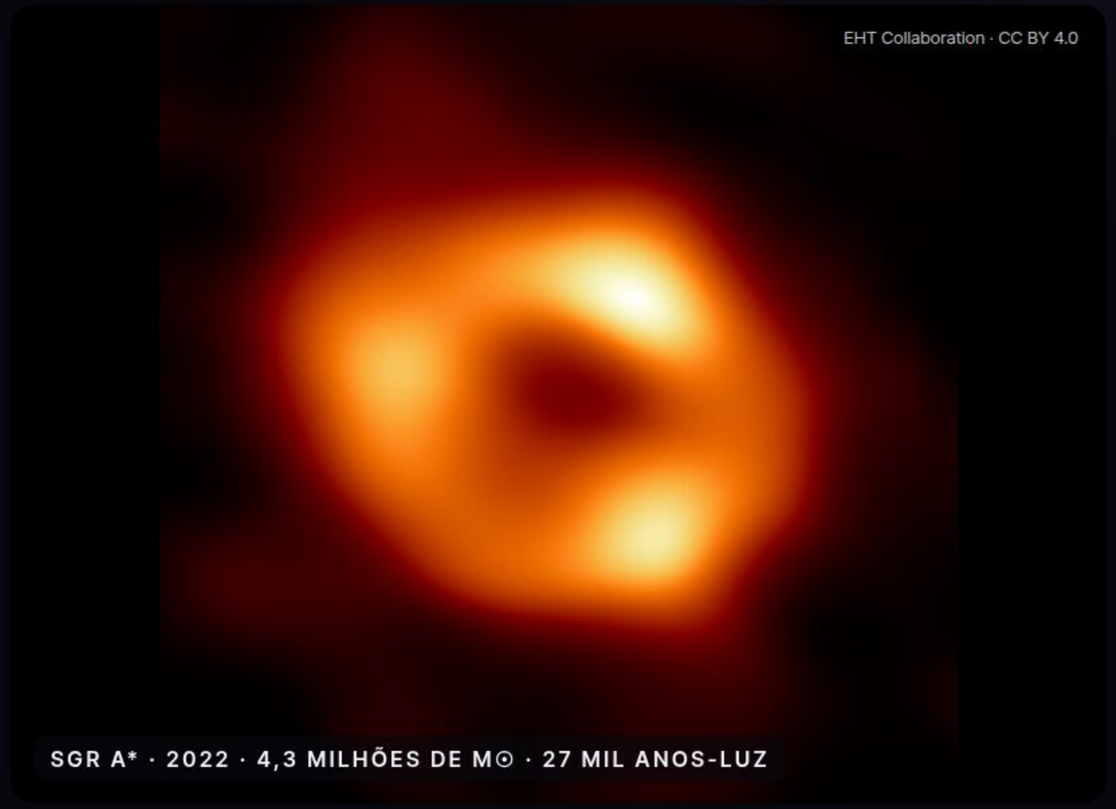
- $b > 3\sqrt{3}\,GM/c^2 \approx 2{,}6\ R_S$: a luz é desviada e escapa.
- $b = 2{,}6\ R_S$: órbita instável na **esfera de fótons**, $r = 1{,}5\ R_S$.
- $b < 2{,}6\ R_S$: capturada.

O termo à direita é a correção da Relatividade Geral. Sem ele, a luz andaria em linha reta.

EVENT HORIZON TELESCOPE · 2019 E 2022

As *sombras*





O anel tem ~5 R_S de diâmetro: é a esfera de fótons, a 1,5 R_S, vista através da lente do próprio buraco negro — diâmetro da sombra = $2\sqrt{27}\,GM/c^2 \approx 5{,}2\,R_S$.

COMPACIDADE

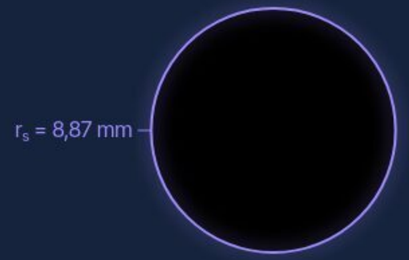
Onde a RG *deixa de ser correção*

• O RAIO E O RAIO DE SCHWARZSCHILD DA MESMA MASSA

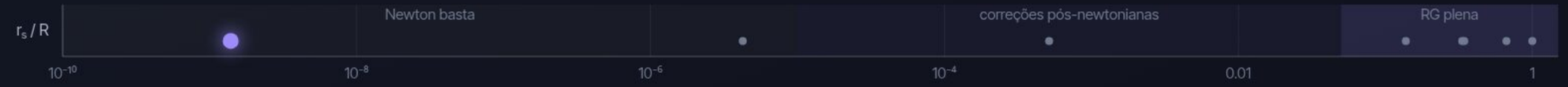
Terra | Sol | Sirius B | proto-EN | est. nêutrons | ISCO | esf. fótons | horizonte

Terra R = 6 371 km · a borda está fora do quadro

comprimida até r_s, a Terra seria um buraco negro do tamanho de uma bola de gude



massa · raio	$5{,}97\times10^{24}$ kg · 6 371 km
raio de Schwarzschild, $r_s = 2GM/c^2$	8,87 mm
compacidade, r_s/R	$1{,}39\times10^{-9}$
velocidade de escape	11,2 km/s
gravidade na superfície	1 g
desvio para o vermelho, z	$6{,}96\times10^{-10}$
o relógio da superfície atrasa	60,1 µs por dia
desvio de um raio rasante	$5{,}7\times10^{-4}$″
superfície vista de longe	50% + $7{,}0\times10^{-8}$%



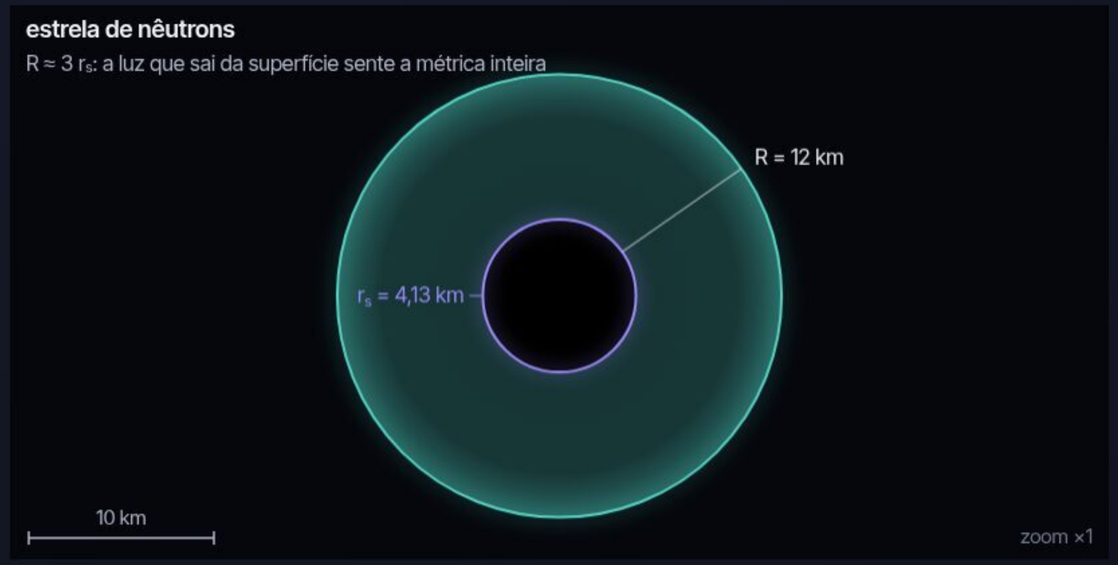
Superfície comparada ao infinito: $z = (1 - r_s/R)^{-1/2} - 1$, $g = (GM/R^2)(1 - r_s/R)^{-1/2}$ · desvio pela integral exata da órbita (campo fraco: $2r_s/R$) · ISCO, esfera de fótons e horizonte: uma estrela de 1,4 M☉ desse tamanho · os objetos passam sozinhos até o primeiro clique.

COMPACIDADE

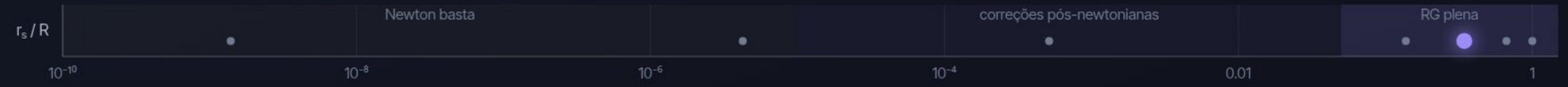
Onde a RG *deixa de ser correção*

• O RAIO E O RAIO DE SCHWARZSCHILD DA MESMA MASSA

Terra | Sol | Sirius B | proto-EN | **est. nêutrons** | ISCO | esf. fótons | horizonte



massa · raio	1,4 M⊙ · 12 km
raio de Schwarzschild, $r_s = 2GM/c^2$	4,13 km
compacidade, r_s/R	0,345
velocidade de escape	0,59 c
gravidade na superfície	$1{,}6\times10^{11}$ g
desvio para o vermelho, z	0,235
o relógio da superfície atrasa	4,57 h por dia
desvio de um raio rasante	61°
superfície vista de longe	75,5%



Superfície comparada ao infinito: $z = (1 - r_s/R)^{-1/2} - 1$, $g = (GM/R^2)(1 - r_s/R)^{-1/2}$ · desvio pela integral exata da órbita (campo fraco: $2r_s/R$) · ISCO, esfera de fótons e horizonte: uma estrela de 1,4 M⊙ desse tamanho · os objetos passam sozinhos até o primeiro clique.

Da superfície ao infinito: $\psi(\alpha)$

Um fóton sai da superfície com ângulo α em relação à normal. Ao chegar ao observador, terá girado ψ em torno do centro:

$$b = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{(1 - R_s/R)}}$$

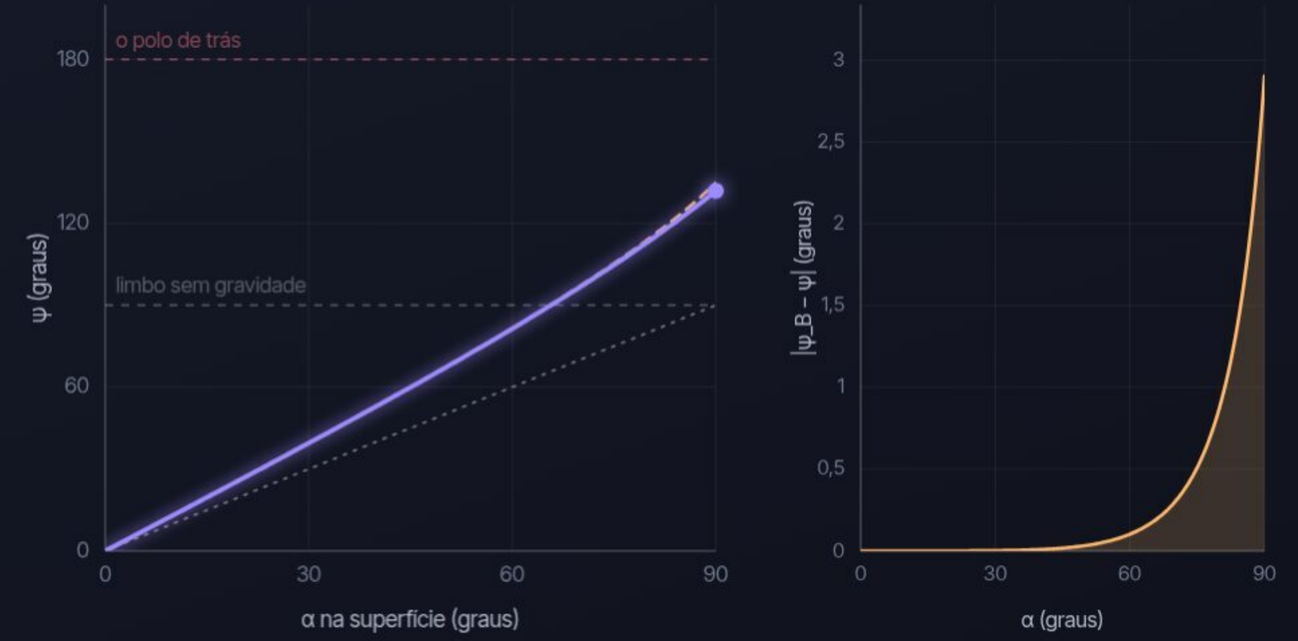
$$\psi(b) = \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{(b^{-2} - u^2(1 - R_s u))}}$$

EXATO

$$1 - \cos \alpha \approx (1 - \cos \psi)(1 - \frac{R_s}{R})$$

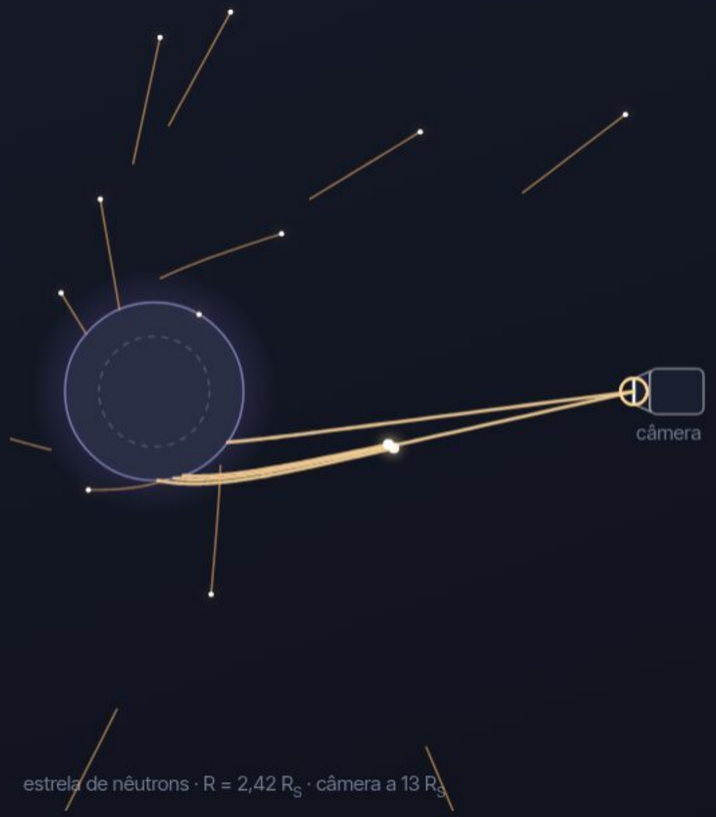
BELOBORODOV (2002)

Sem gravidade, ψ = α e o limbo está em 90°. Com gravidade, o limbo vai além: **vemos atrás da estrela**. A aproximação é ótima até $R \approx 3\ R_S$ e falha justamente onde aparece a imagem secundária.



A IDEIA INGÊNUA: DA ESTRELA PARA A CÂMERA

Muitos raios, *quase nenhum pixel*





estrela de nêutrons · R = 2,42 R_S · câmera a 13 R_S

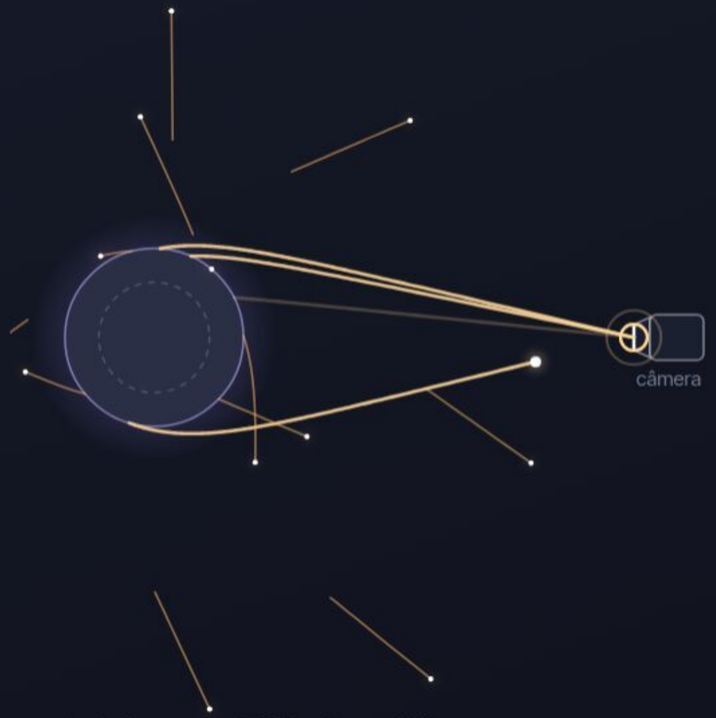
raios lançados **10 400** entraram na câmera **4** (0,038%) pixels acesos **2** de 1568 imagem completa em **~5 h**

- Cada ponto da superfície emite em **todas as direções**; segue-se cada raio pela geodésica, para fora.
- Só os que passam pela abertura da câmera viram pixel: aqui, **2 em cada 10 000**.
- Para completar esta imagem seriam ~10^8 raios: horas de conta.
- Com um telescópio de verdade, 1 m^2 a 1 kpc, chega **1 fóton em cada 10^{40}**.

Contagem em 3D: ponto uniforme na superfície, direção isotrópica para fora, geodésica exata até a câmera, a 13 R_S. Desenhada, só uma amostra no plano; os raios que entram na câmera aparecem todos.

A IDEIA INGÊNUA: DA ESTRELA PARA A CÂMERA

Muitos raios, *quase nenhum pixel*





estrela de nêutrons · R = 2,42 R_S · câmera a 13 R_S

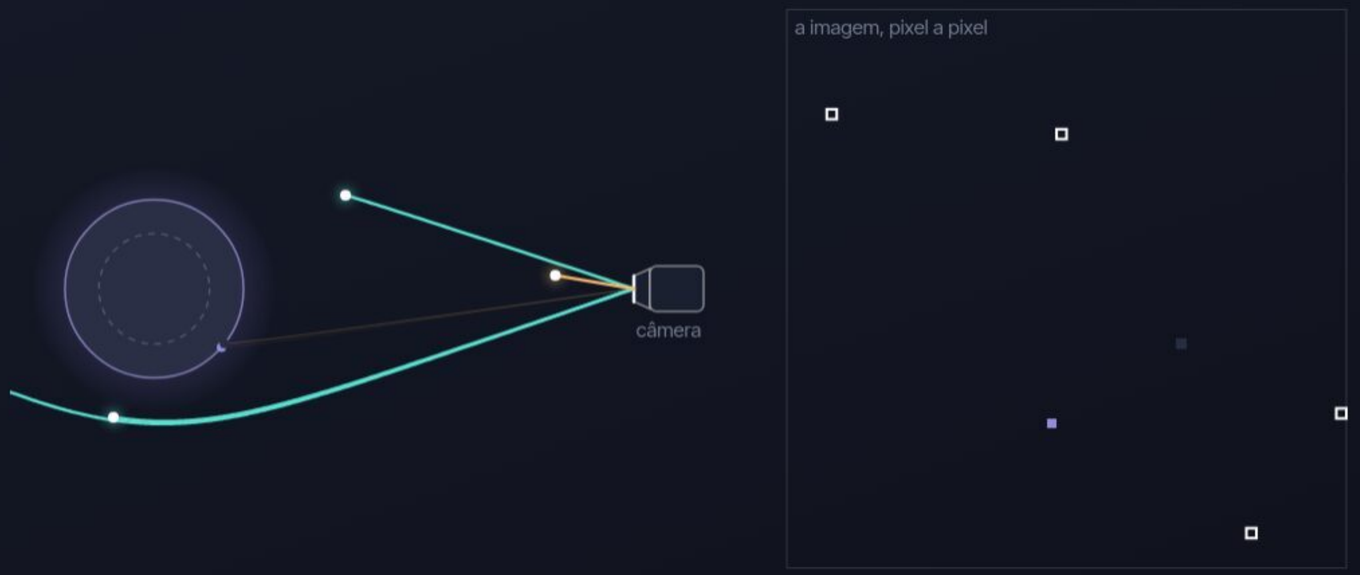
raios lançados **180 000** entraram na câmera **34** (0,019%) pixels acesos **31** de 1568 imagem completa em **~5 h**

- Cada ponto da superfície emite em **todas as direções**; segue-se cada raio pela geodésica, para fora.
- Só os que passam pela abertura da câmera viram pixel: aqui, **2 em cada 10 000**.
- Para completar esta imagem seriam ~10^8 raios: horas de conta.
- Com um telescópio de verdade, 1 m^2 a 1 kpc, chega **1 fóton em cada 10^{40}**.

Contagem em 3D: ponto uniforme na superfície, direção isotrópica para fora, geodésica exata até a câmera, a 13 R_S. Desenhada, só uma amostra no plano; os raios que entram na câmera aparecem todos.

O MÉTODO: DA CÂMERA PARA A ESTRELA

Um pixel, *um raio*



estrela de nêutrons · R = 2,42 R_S · câmera a 13 R_S

pixel (27, 12) · θ 9,3° · b 2,20 R_S acerta a superfície · α 44° · ψ 49° raios calculados = pixels 6 (0%)

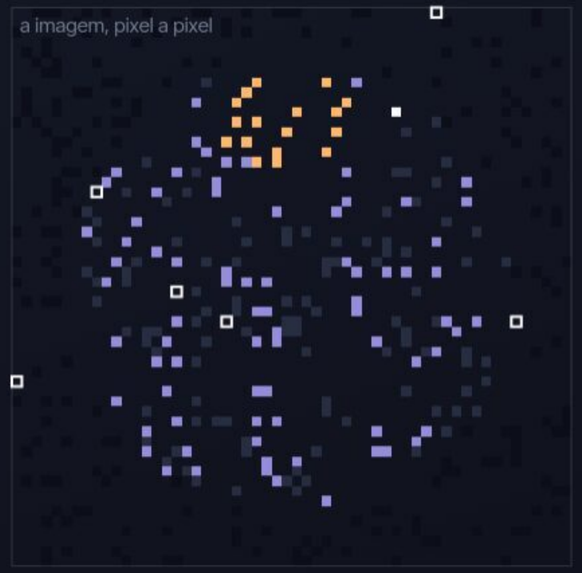
- Os raios saem da **câmera**, um por pixel: o caminho da luz percorrido ao contrário. A direção do pixel dá o parâmetro de impacto ***b***.
- Integra-se a geodésica até o raio escapar para o céu ou acertar a superfície num ponto, com um ângulo α.
- A cor do pixel é a do ponto de onde a luz saiu — corrigida por redshift e pelo ângulo de emissão.
- Todo raio calculado vira pixel: **3 136 raios, 3 136 pixels**, contra os 10^8 do slide anterior.

Na simetria esférica, ψ depende só de ***b***: basta uma tabela ψ(***b***), calculada uma vez, para todos os pixels. Cada raio é girado para o plano do desenho.

O MÉTODO: DA CÂMERA PARA A ESTRELA

Um pixel, *um raio*





estrela de nêutrons · R = 2,42 R_S · câmera a 13 R_S

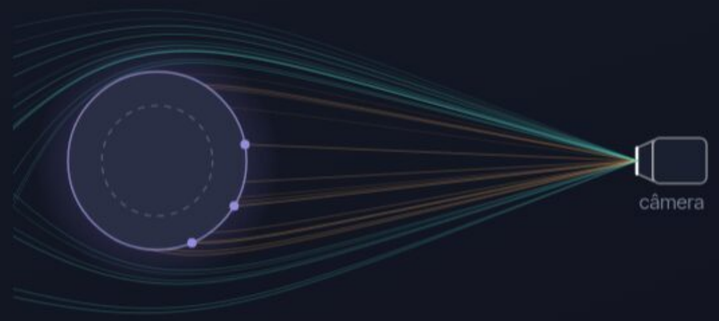
pixel **(21, 31)** · θ **4,4°** · b **1,05** R_S acerta a superfície · α **19°** · ψ **21°** raios calculados = pixels **409** (13%)

- Os raios saem da **câmera**, um por pixel: o caminho da luz percorrido ao contrário. A direção do pixel dá o parâmetro de impacto ***b***.
- Integra-se a geodésica até o raio escapar para o céu ou acertar a superfície num ponto, com um ângulo α.
- A cor do pixel é a do ponto de onde a luz saiu — corrigida por redshift e pelo ângulo de emissão.
- Todo raio calculado vira pixel: **3 136 raios, 3 136 pixels**, contra os 10^8 do slide anterior.

Na simetria esférica, ψ depende só de ***b***: basta uma tabela ψ(***b***), calculada uma vez, para todos os pixels. Cada raio é girado para o plano do desenho.

O MÉTODO: DA CÂMERA PARA A ESTRELA

Um pixel, *um raio*





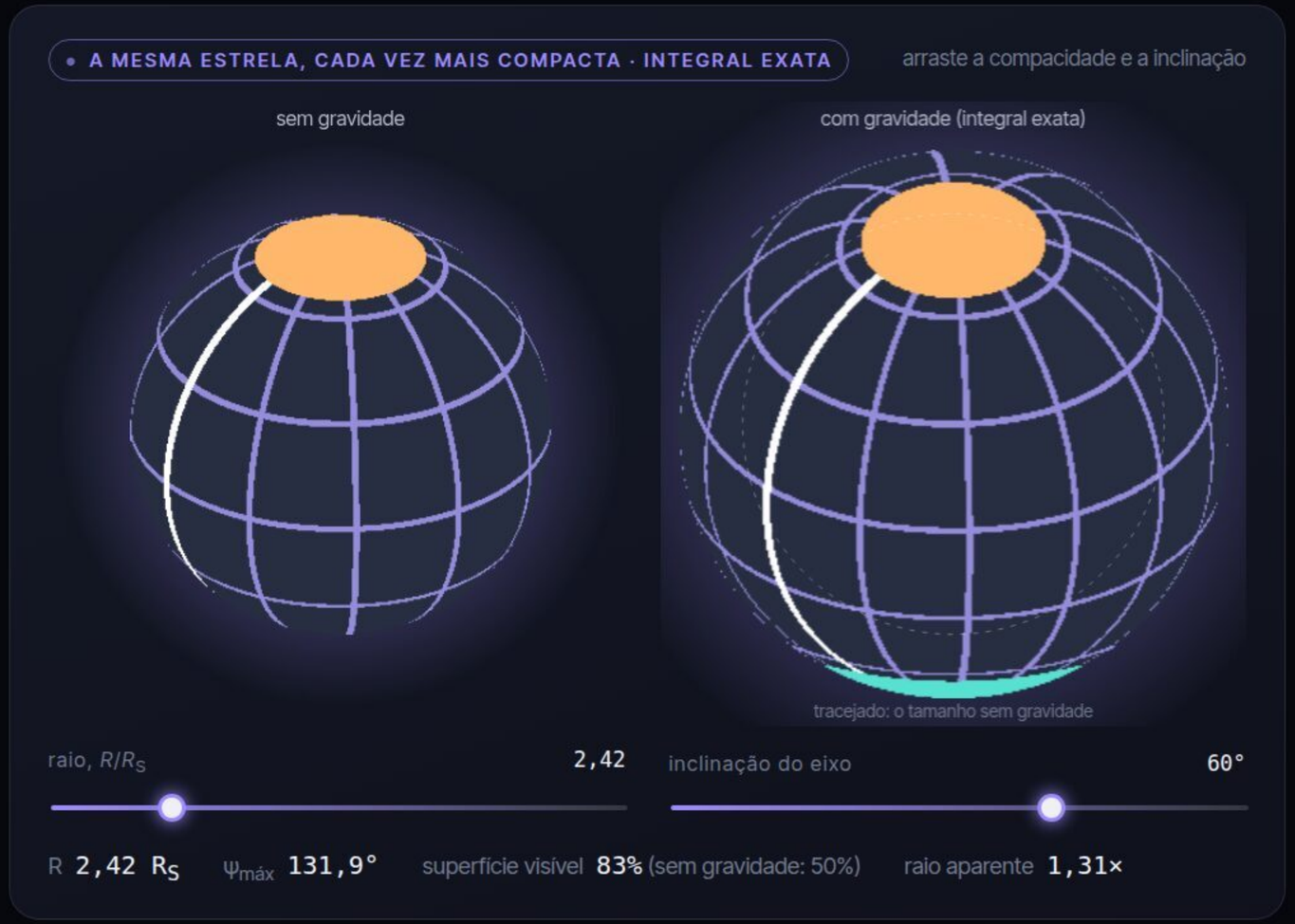
estrela de nêutrons · R = 2,42 R_S · câmera a 13 R_S

pixel `(34, 3)` · θ `15,3°` · b `3,57` R_S `escapa: céu` raios calculados = pixels `3 136` (100%)

- Os raios saem da **câmera**, um por pixel: o caminho da luz percorrido ao contrário. A direção do pixel dá o parâmetro de impacto ***b***.
- Integra-se a geodésica até o raio escapar para o céu ou acertar a superfície num ponto, com um ângulo α.
- A cor do pixel é a do ponto de onde a luz saiu — corrigida por redshift e pelo ângulo de emissão.
- Todo raio calculado vira pixel: **3 136 raios, 3 136 pixels**, contra os 10^8 do slide anterior.

Na simetria esférica, ψ depende só de ***b***: basta uma tabela ψ(***b***), calculada uma vez, para todos os pixels. Cada raio é girado para o plano do desenho.

Vemos *atrás* da estrela

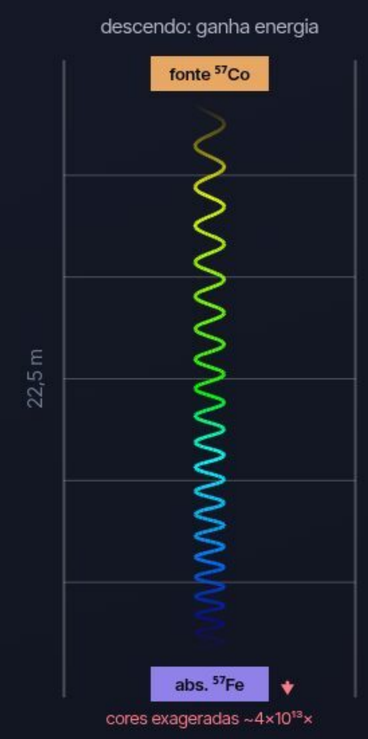


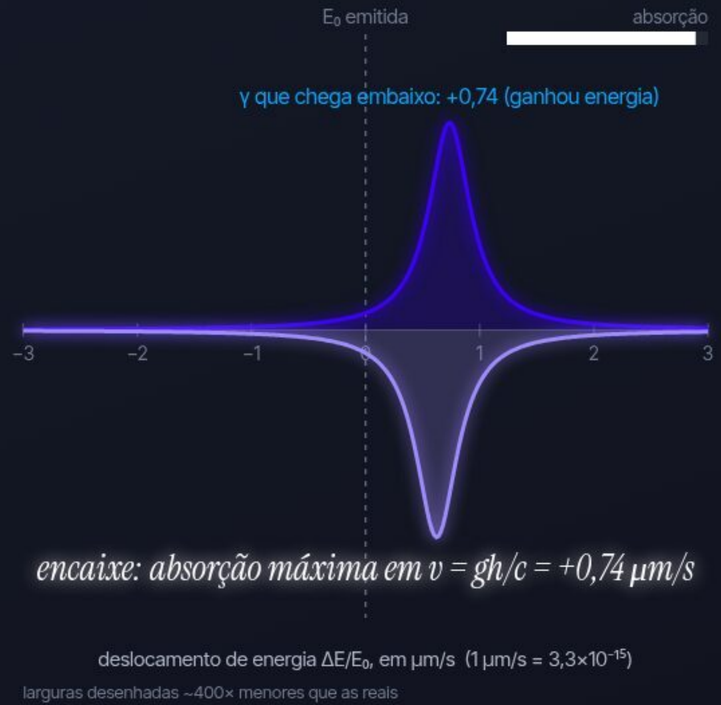
À esquerda, a estrela como seria sem gravidade; à direita, ray-traced. A grade é a mesma; a gravidade dobra a luz em volta da estrela e mostra o **hemisfério de trás**.

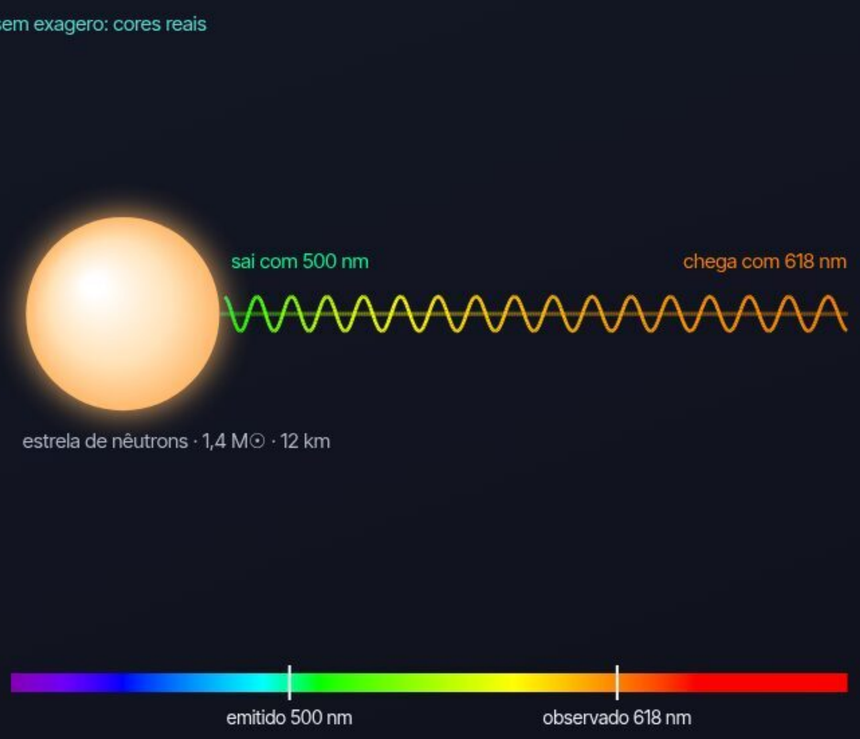
- A imagem é maior: raio aparente $R/\sqrt{(1 - R_S/R)}$.
- Para $R < 1{,}76\ R_S$ a superfície inteira aparece — o polo de trás vira um anel.
- Abaixo de $1{,}5\ R_S$ a estrela estaria dentro da esfera de fótons.

1959 · POUND & REBKA · TORRE JEFFERSON, HARVARD

A luz *perde energia ao subir*







torre $\Delta\nu/\nu = gh/c^2$ **2,46×10⁻¹⁵** ressonância em **+0,74 μm/s** ≈ 2,7 mm por hora absorvedor agora **0,62 μm/s** estrela $1 + z = (1 - r_s/R)^{-½}$ **1,235**

Raios γ de 14,4 keV do ^{57}Fe (efeito Mössbauer). Pound & Rebka, PRL 4, 337 (1960): ~10%; Pound & Snider, Phys. Rev. 140, B788 (1965): ~1%. A cada 12 s fonte e absorvedor trocam de lugar, como no experimento.

O espectro que *sai do poço*

Ao longo de um raio, I_ν/ν^3 se conserva. Com $g = \sqrt{(1 - R_S/R)}$:

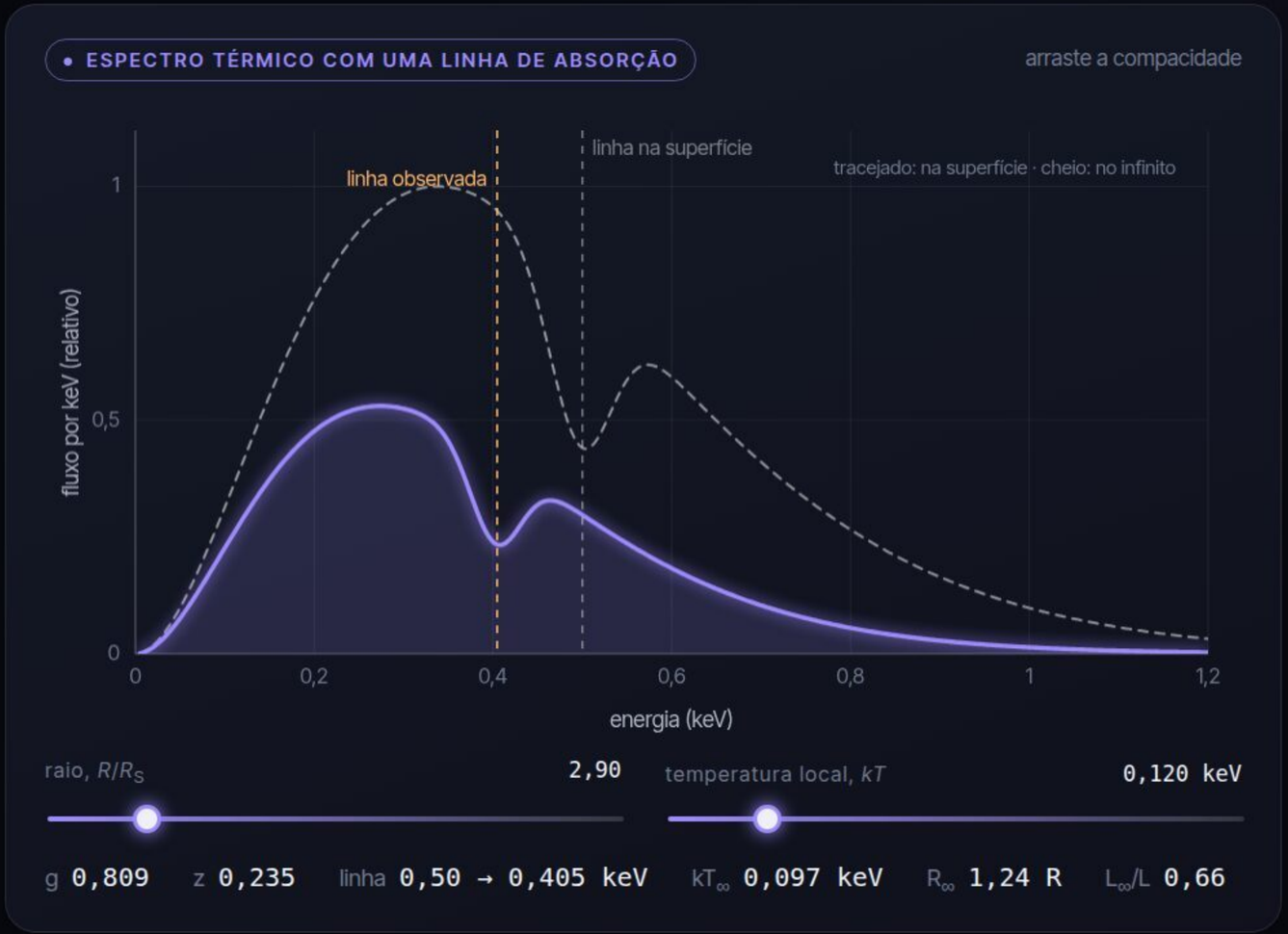
$$I_{obs}(E) = g^3\, I_{em}(E/g)$$

INTENSIDADE ESPECÍFICA

$$T_\infty = g\,T \qquad R_\infty = R/g$$

Um corpo negro continua corpo negro, mais frio. A luminosidade vista de longe é $L_\infty = g^2\,L$.

Uma **linha espectral** de energia conhecida E_0 chega em $g\,E_0$: medir a linha é medir a **compacidade**.



RESUMO DA PARTE II

A receita do *ray tracing*

1. **Escolha a métrica** exterior: Schwarzschild; Hartle–Thorne ou Kerr com rotação; outra, se a teoria da gravidade for outra.
2. **Monte a tabela** $\psi(b)$ e o atraso $\Delta t(b)$ integrando as geodésicas nulas uma vez.
3. **Para cada pixel** (ou cada elemento da superfície): $b \rightarrow$ ponto emissor, ângulo α, redshift g, atraso.
4. **Intensidade**: $I_{obs} = g^3\, I(E/g, \alpha')$, com o feixe da atmosfera e o Doppler da rotação.
5. **Some**: imagem, fluxo — e, fase a fase, a **curva de luz** e o espectro resolvido em fase.

EXATO OU APROXIMADO?

- **Integral exata** (ou integrais elípticas): sempre vale, inclusive com imagens secundárias.
- **Beloborodov (2002)** e Poutanen & Beloborodov (2006): fórmulas fechadas para ψ e para o atraso, ótimas para $R \gtrsim 3\, R_S$.
- **Oblate Schwarzschild** (Morsink et al. 2007): estrela achatada pela rotação, para pulsares de milissegundo.

É esse o motor por trás das medidas de massa e raio do NICER — e dos resultados da Parte IV.

III

PARTE TRÊS

Pulsares e *estrelas de nêutrons*

Os laboratórios: mais compactos que qualquer coisa que não seja um buraco negro, girando, magnetizados — e com a superfície visível em raios X.

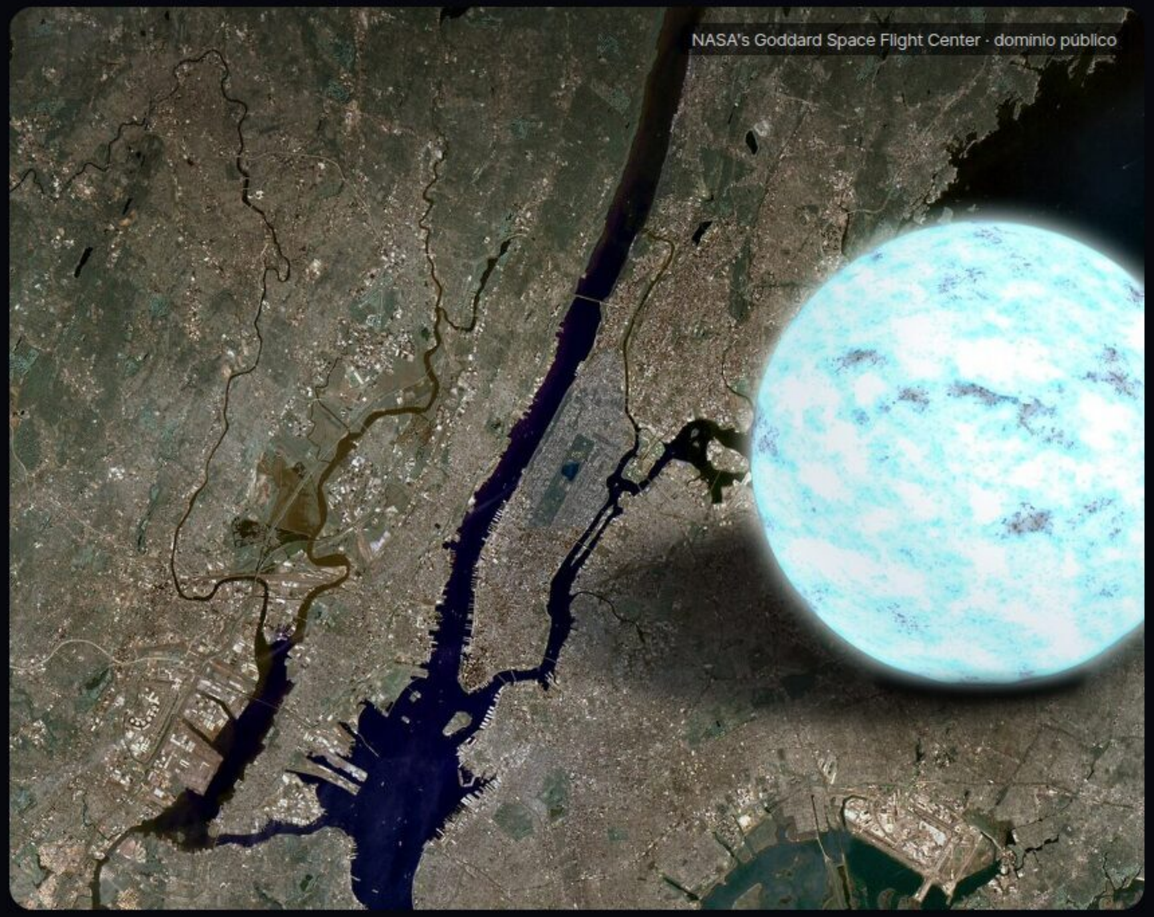
pulsares e magnetares · manchas quentes · rotação e atmosfera · NICER



Pulsar (ilustração) · NASA · domínio público

ESTRELAS DE NÊUTRONS EM NÚMEROS

Uma massa solar *numa cidade*



Uma estrela de nêutrons de ~20 km de diâmetro sobre Manhattan, em escala.

1,1–2,1 $M_\odot$
massas medidas

11–13 km
raio (NICER, ondas gravitacionais)

2–3 R_S
compacidade: o regime da Parte II

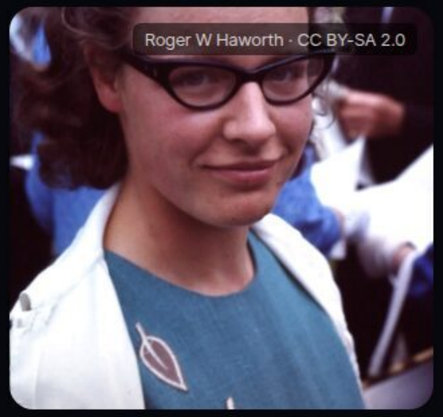
10^8–10^{15} G
campo magnético na superfície

Densidade central de algumas vezes a do núcleo atômico, ~10^{15} g/cm^3. Períodos de rotação de **1,4 ms** a dezenas de segundos.

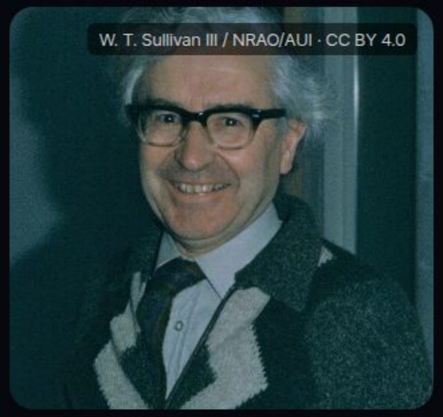
A gravidade na superfície é ~10^{11} vezes a da Terra; a velocidade de escape, de 0,5 a 0,7 **c**.

CAMBRIDGE · 28 DE NOVEMBRO DE 1967

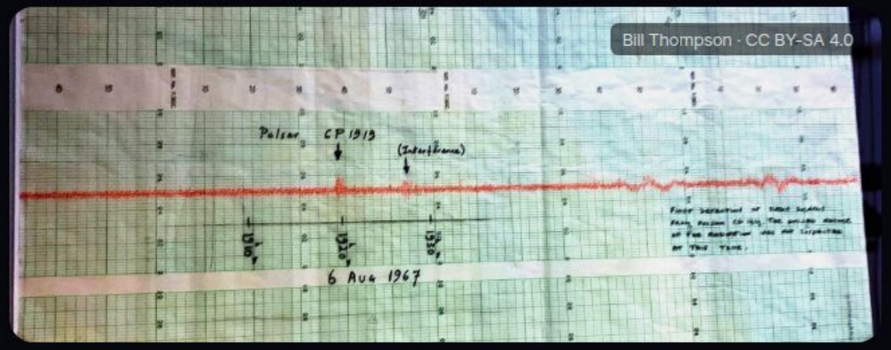
O primeiro pulsar: *"LGM-1"*



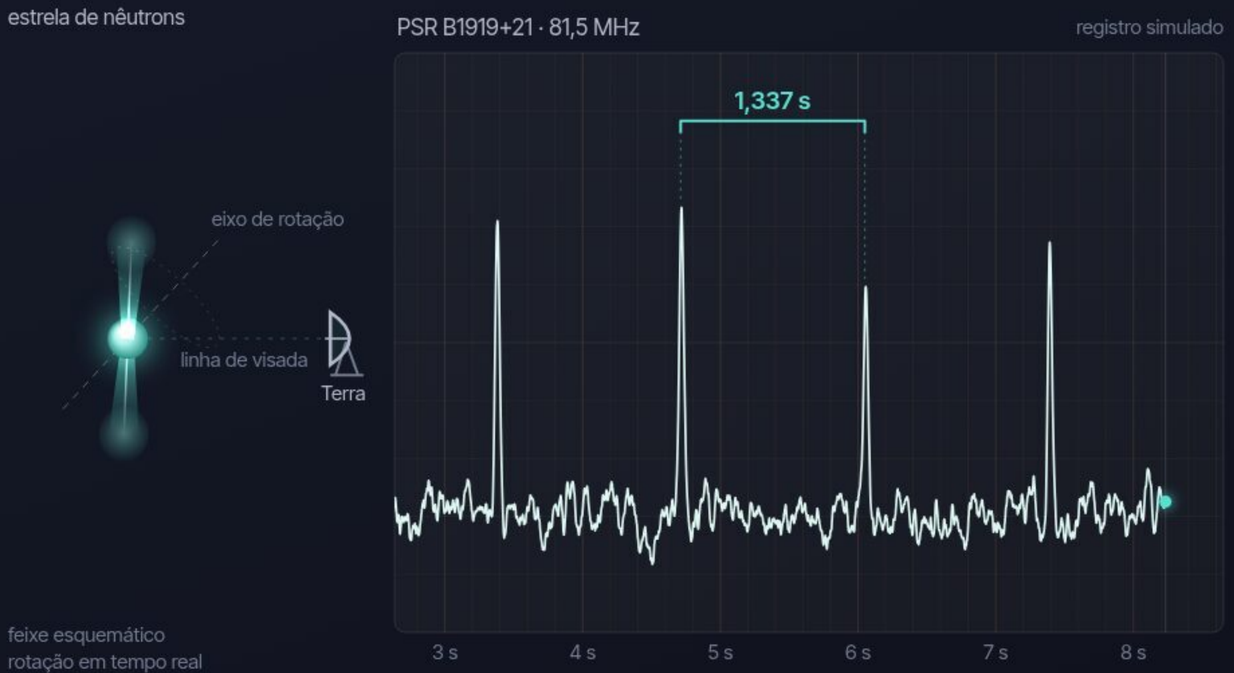
Jocelyn Bell
em 1967, doutoranda



Antony Hewish
orientador · Nobel de 1974



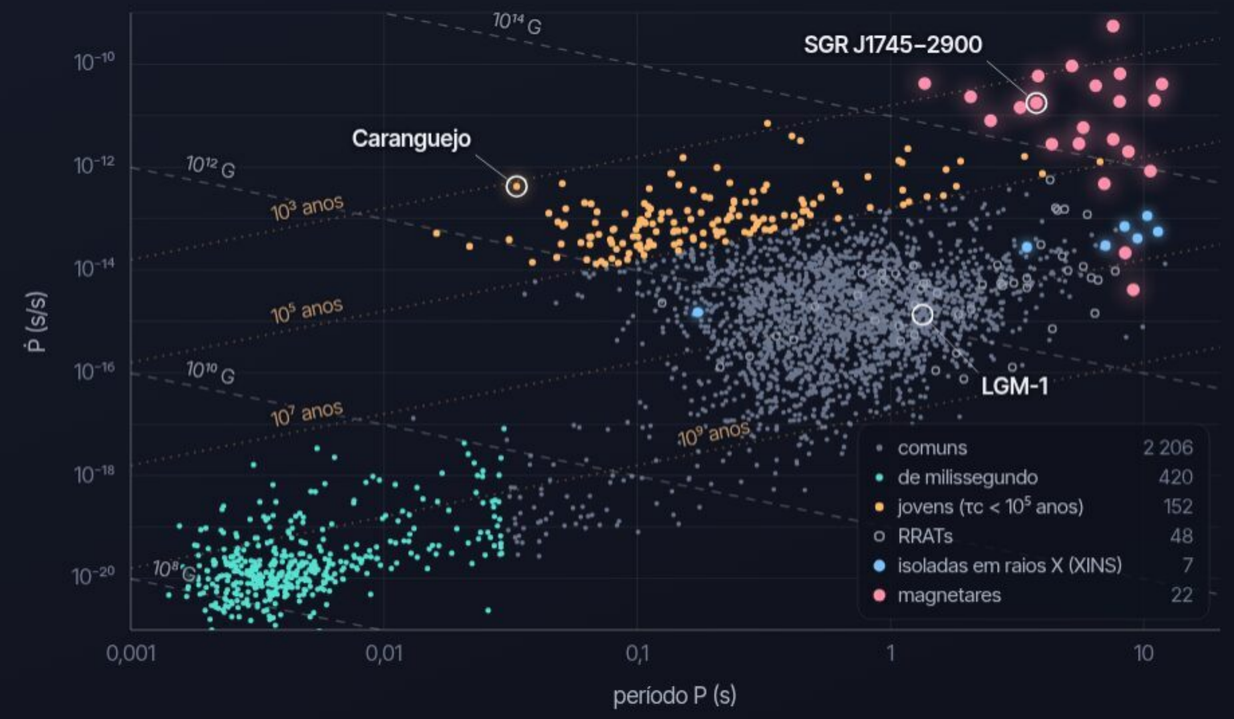
O registro original, de agosto de 1967: a "sujeira" marcada a lápis como CP 1919.



período `1,337 302 s` Ṗ `1,35×10⁻¹⁵ s/s` frequência `81,5 MHz` pulsos registrados `6`

Bell notou um "ruído" que voltava no registro em papel do radiotelescópio: pulsos a cada **1,337 s**, regulares como um relógio. Apelido: **LGM-1**, de *Little Green Men* — homenzinhos verdes. Era uma estrela de nêutrons girando.

O que se mede, *e o que se deduz*



OBSERVÁVEL	EXPRESSÃO
período	P
idade característica	$t_c = P/2\dot{P}$
campo magnético	$B = (3Ic^3P\dot{P}/8\pi^2R^6)^{1/2}$
energia de rotação perdida	$\dot{E}_{rot} = -4\pi^2I\dot{P}/P^3$

ESTRELA DE NÊUTRONS CANÔNICA

$M = 1{,}4\ M_\odot \cdot R = 10\ km \cdot I = 10^{45}\ g\ cm^2$

$B = 3{,}2\times10^{19}\ (P\dot{P})^{1/2}\ G$

$|\dot{E}_{rot}| = 3{,}9\times10^{46}\ \dot{P}/P^3\ erg/s$

Só se mede P e $\dot{P}$. O resto vem de supor um dipolo magnético girando — as retas do diagrama.

Um magnetar, *girando*

SGR J1745−2900



linhas de um dipolo inclinado · rotação em tempo real

surtos ilustrativos

P 3,76 s B ≈ 2,6×10¹⁴ G idade característica ≈ 3 400 anos $\dot{E}_{rot}$ ≈ 1,3×10³⁴ erg/s

surtos vistos 1

EVENTO	ENERGIA
surtos curtos (~0,1 s)	10^{39} – 10^{41} erg
outbursts (meses)	10^{41} – 10^{43} erg
flares gigantes	10^{44} – 10^{46} erg

As linhas de campo, ancoradas na crosta, se torcem com o tempo. Quando a crosta não aguenta a tensão, ela racha — um **estrelamoto** — e a energia magnética sai de uma vez.

Flares gigantes na Galáxia e nas Nuvens de Magalhães: 1979, 1998 e 2004.

A SUPERFÍCIE EM RAIOS X

Por que aparecem *manchas quentes*

PULSARES DE MILISSEGUNDO

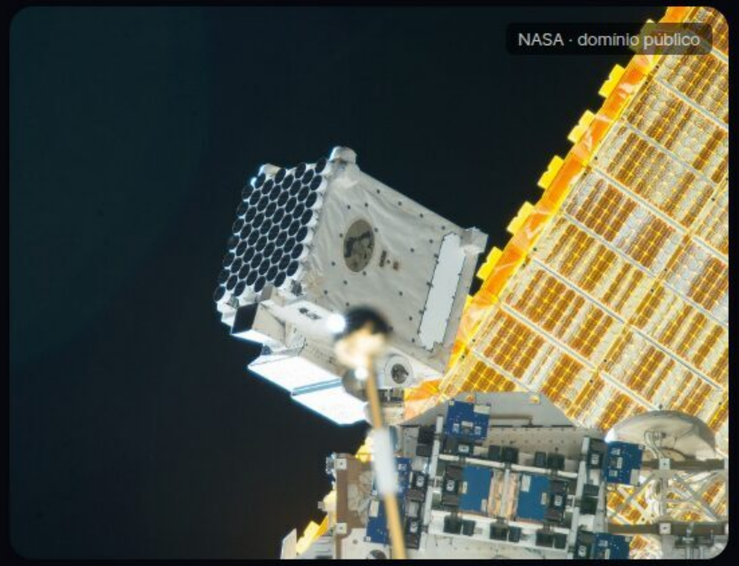
Partículas aceleradas na magnetosfera voltam e **aquecem as calotas polares** a ~10^6 K. São os alvos do NICER.

MAGNETARES

O **decaimento do campo** e as correntes nas linhas torcidas aquecem regiões da crosta — que mudam depois de cada *outburst*.

ESTRELAS ISOLADAS QUE ESFRIAM

O campo magnético torna a **condução de calor anisotrópica**: polos mais quentes que o equador (as "Sete Magníficas").



NICER · na Estação Espacial, desde 2017 · resolução temporal de ~100 ns



XMM-Newton · ESA, desde 1999 · a maior área coletora em raios X moles



Chandra · NASA, desde 1999 · a melhor resolução angular

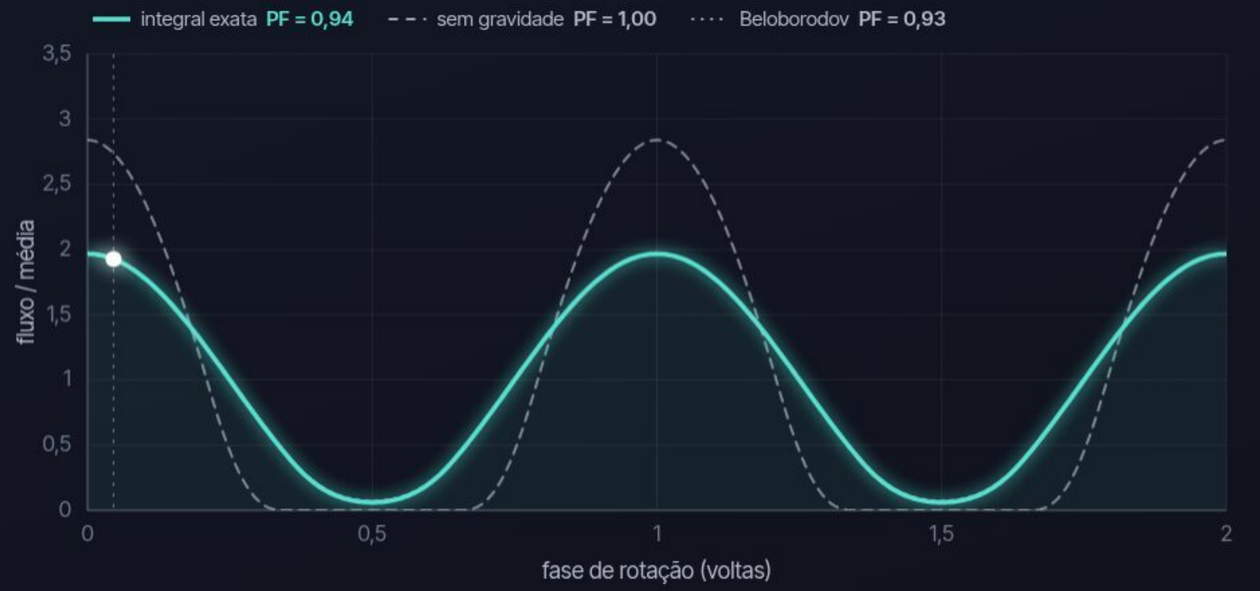
Uma mancha, *uma curva de luz*

• ESTRELA ESTÁTICA · INTEGRAL EXATA, BELOBORODOV OU ESPAÇO PLANO

sem gravidade | Beloborodov | integral exata



estrela estática · 1 volta em 4 s
tamanhos em unidades de R



raio, R/R_S 2,42 | mancha ↔ eixo, *i* 60° | observador ↔ eixo, *j* 75° | raio angular da mancha 20°

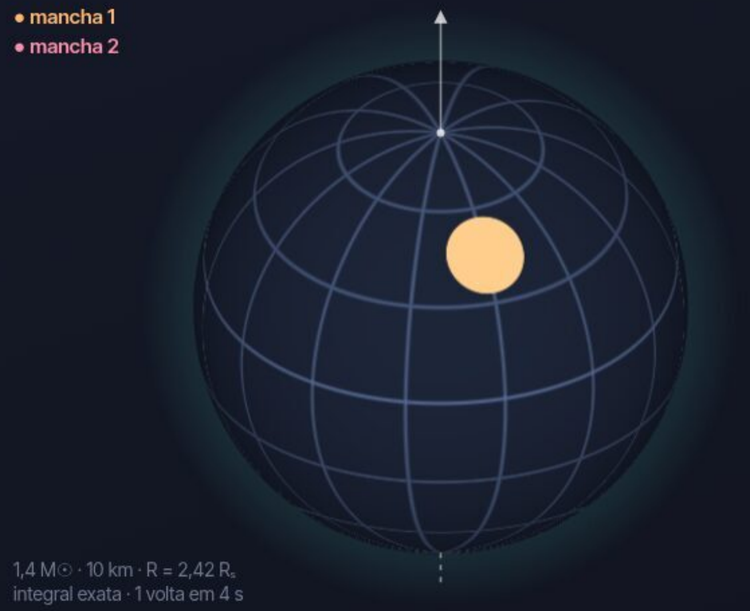
PF sem gravidade 1,000 PF Beloborodov 0,928 PF exata 0,939 superfície à vista 83% $\psi_{máx}$ 131,9°

classe B · o centro some 10% da volta (a borda fica) imagem secundária não (exige R < 1,76 R_S)

Antípodas, *ou não*

• DUAS MANCHAS: UMA EM CADA POLO MAGNÉTICO

antípodas | deslocadas





eixo magnético ↔ rotação, *i* 45°

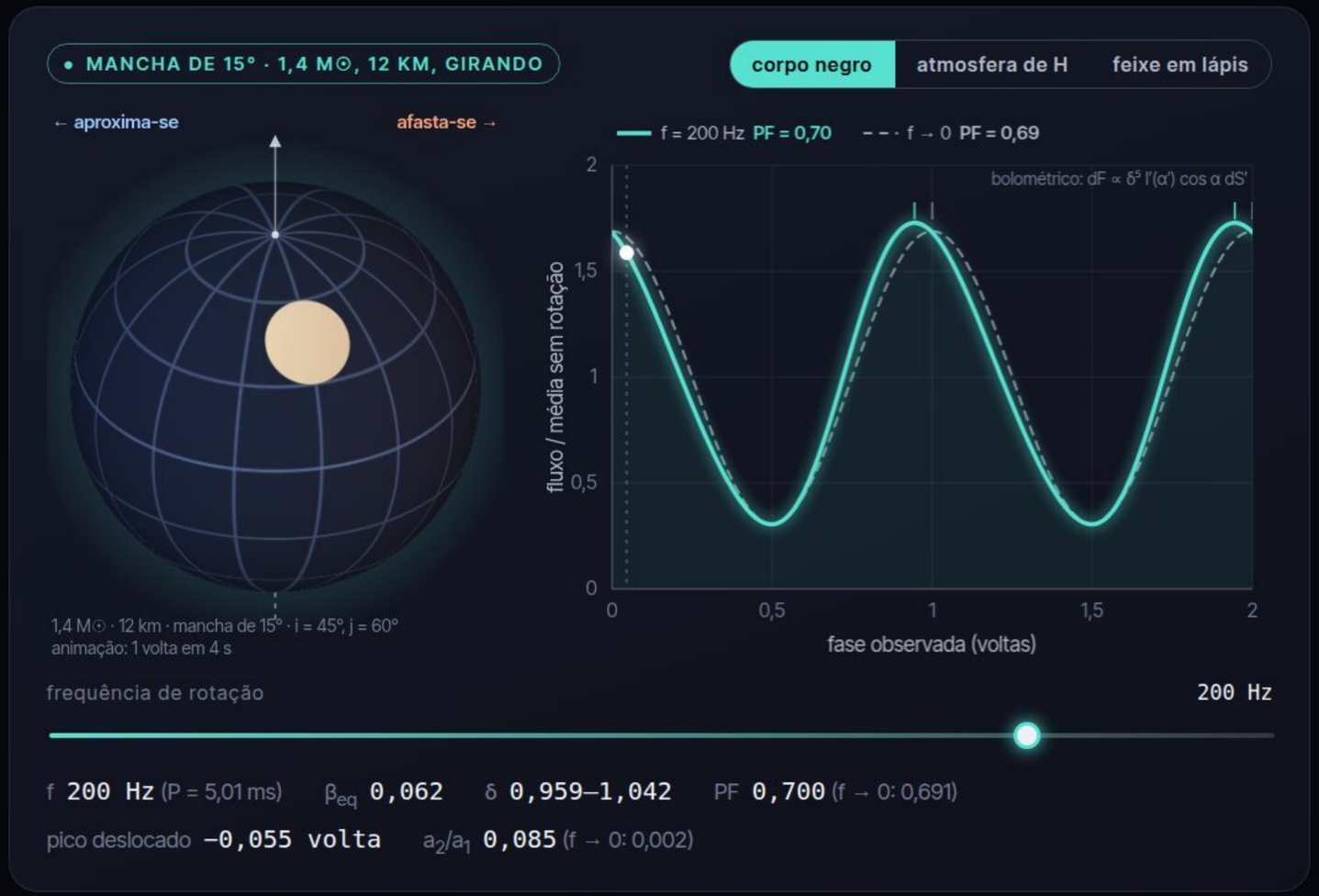
observador ↔ rotação, *j* 60°

deslocamento da segunda mancha 0°

classe II · primária sempre; antípoda às vezes | PF 0,086 | mancha 1 à vista sempre | mancha 2 à vista 77% da volta | as duas 77% | pulsos separados por 0,50 volta

$\Psi_{máx}$ 131,9°

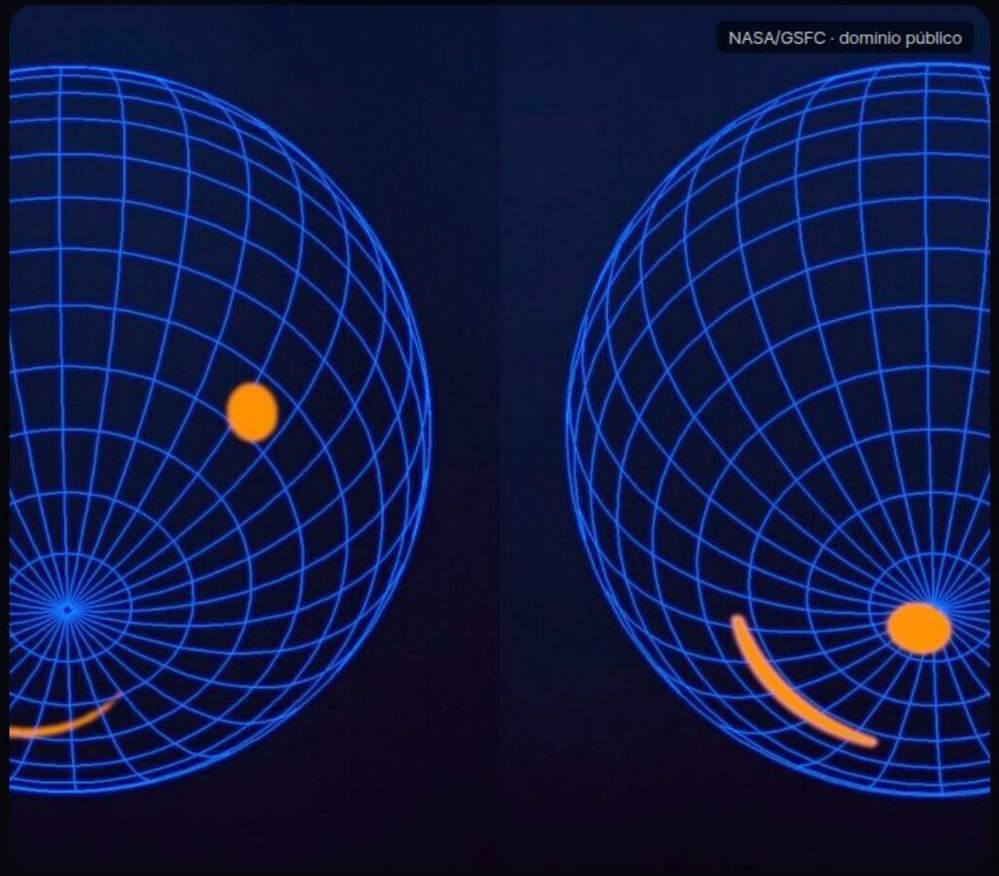
Doppler, aberração, atrasos *e o feixe*



- **Doppler**: a superfície anda a até 0,1–0,2 c; o lado que se aproxima brilha mais (fluxo bolométrico ∝ δ^5).
- **Aberração**: o ângulo de emissão muda no referencial da superfície.
- **Atrasos**: dezenas de µs entre os pontos da estrela — frações do período a centenas de Hz.
- **Feixe**: uma atmosfera não emite igual em todas as direções; o perfil depende disso.

Juntos, deixam o pulso **assimétrico** e criam harmônicos — e a assimetria mede R separado de M.

Massa e raio *pela forma do pulso*



PSR J0030+0451 · as soluções das duas equipes: Amsterdã (Riley+ 2019, à esquerda) e Maryland (Miller+ 2019). Em ambas, as manchas estão longe de ser antípodas.

PULSAR	MASSA (M⊙)	RAIO (KM)
PSR J0030+0451 · Riley+ 2019	$1{,}34^{+0{,}15}_{-0{,}16}$	$12{,}7^{+1{,}1}_{-1{,}2}$
PSR J0030+0451 · Miller+ 2019	$1{,}44^{+0{,}15}_{-0{,}14}$	$13{,}0^{+1{,}2}_{-1{,}1}$
PSR J0740+6620 · Riley+ 2021	$2{,}07^{+0{,}07}_{-0{,}07}$	$12{,}4^{+1{,}3}_{-1{,}0}$
PSR J0437−4715 · Choudhury+ 2024	$1{,}42 \pm 0{,}04$	$11{,}4^{+1{,}0}_{-0{,}6}$

O NICER marca o tempo de chegada de cada fóton com ~100 ns. Dobrando milhões de fótons no período, sai o perfil do pulso; o ray tracing, com M, R, a geometria e as manchas livres, ajusta esse perfil por inferência bayesiana.

As manchas de J0030 saíram não antípodas e alongadas: o campo não é um dipolo centrado.

IV

PARTE QUATRO

Resultados *recentes*

Ray tracing aplicado a dados reais — magnetares, um magnetar massivo, colunas de acreção — e a mesma ferramenta usada para testar a gravidade além de Einstein.

SGR J1745−2900 · 3XMM J1852+0033 · colunas de acreção · gravidade escalar-tensorial · braneworld



Magnetar (ilustração) · ESO/L. Calçada · CC BY 4.0

2017 – 2026

Curvas de luz *como instrumento*

2017

A&A 599, A87: SGRs e AXPs movidos a rotação, com estrelas de nêutrons realistas

2020

ApJ 889, 165: SGR J1745–2900 e um campo multipolar, pela curva de luz

2023

Galaxies 11, 18: perfis de pulso de colunas de acreção

2024

JHEAp 42, 52: 3XMM J1852+0033, um magnetar massivo de campo baixo

2024

EPJC 84, 1337: curvas de luz como teste de gravidade escalar-tensorial

2024

PRD 110, 103014: rotação estratificada e o momento de inércia

2025

PRD 112, 083010: estrelas de quarks e a equação de estado da QCD

2026

arXiv:2607.09836: estrelas compactas num braneworld de tensão alta

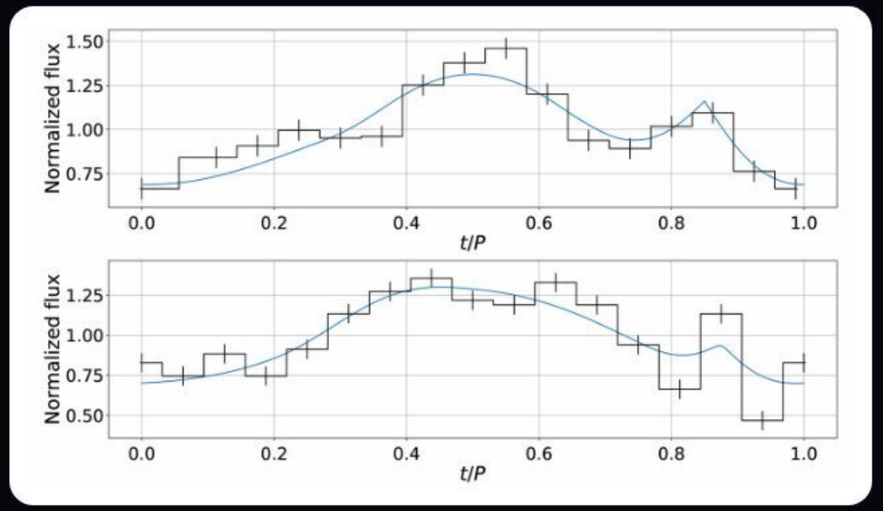
2026

JHEAp (submetido): a coluna de 1A 0535+262 pelo espectro do NuSTAR

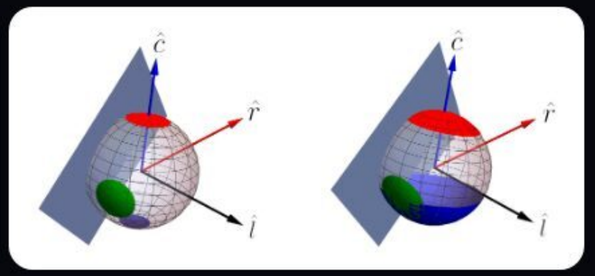
O fio comum: ler na luz de uma estrela compacta a sua *massa*, o seu *raio*, o seu *campo* — e a *gravidade* que a curva.

DE LIMA, COELHO, PEREIRA, RODRIGUES & RUEDA · APJ 889, 165 (2020)

SGR J1745−2900: *mais de duas manchas*



Curvas de luz do Chandra (2013 e 2016) e os ajustes com três manchas.



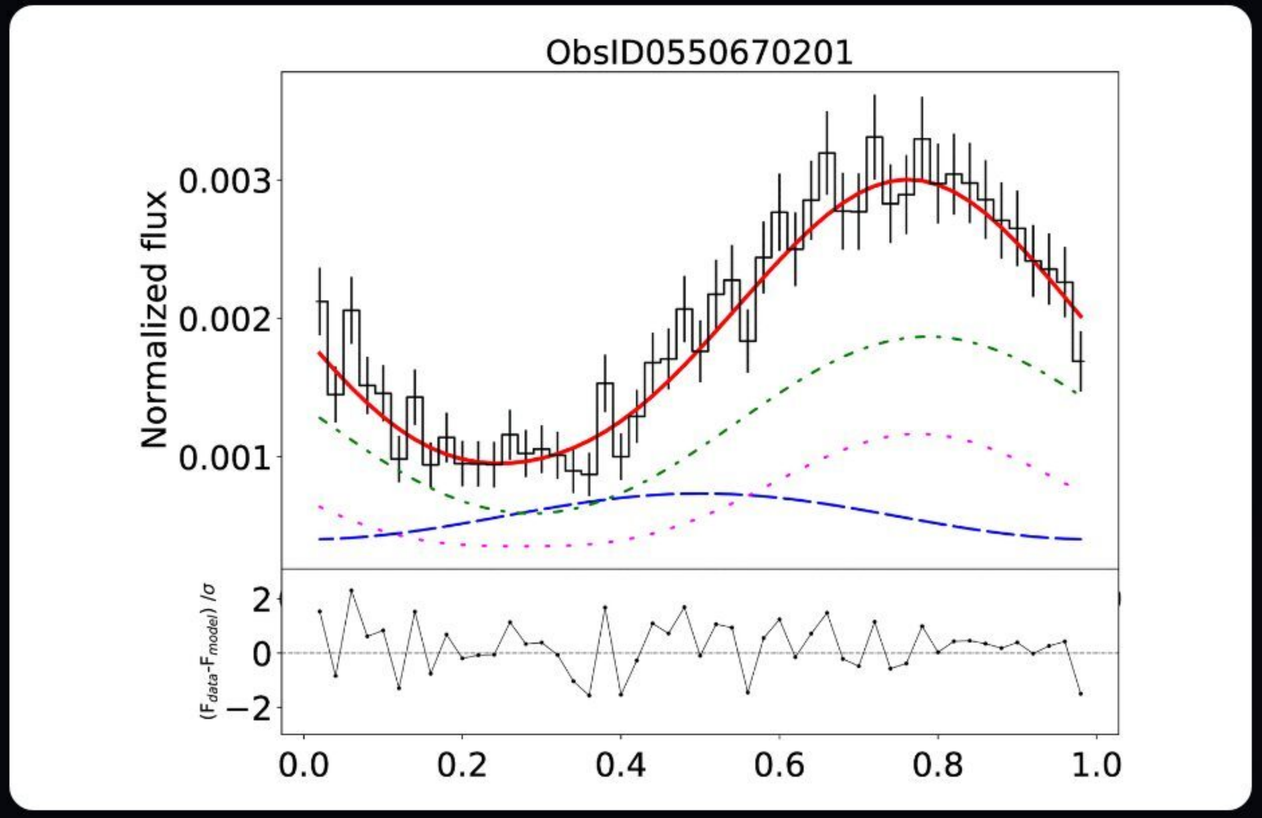
As três manchas: duas nos polos, uma no hemisfério sul.

- O magnetar a 0,1 pc de Sgr A*; 3,5 anos de dados do **Chandra**.
- Modelo: M, R, até **três manchas** de qualquer tamanho e posição, desvio da luz em Schwarzschild; ajuste por algoritmo genético.
- Duas ou três manchas descrevem os dados; com três, elas são **grandes** (16–67°).
- Um campo com estrutura poloidal e toroidal não trivial — o mesmo recado do NICER para J0030.

$1{,}4 \pm 0{,}1$	$10{,}9 \pm 1{,}5$
$M_\odot$	km

DE LIMA ET AL. · JHEAP 42, 52 (2024) · 1/2

3XMM J1852+0033: *ray tracing e inferência*



Um dos cinco perfis de pulso (XMM-Newton, 2008) e o melhor ajuste: em tracejado, a contribuição de cada mancha.

- Um **magnetar transiente** perto do remanescente Kes 79, P = 11,56 s; até aqui só havia limites superiores para o campo.
- Cinco épocas do **XMM-Newton** em três semanas de 2008.
- **Ray tracing** em Schwarzschild com manchas circulares de tamanho qualquer (Turolla & Nobili 2013) e **atmosferas magnetizadas** (NSMAX: H, C, O), com emissão anisotrópica.
- **Inferência bayesiana** (MCMC): massa, raio, campo e posição das manchas comuns às épocas; tamanho e temperatura variando.
- Testado com **injeção e recuperação** de dados simulados.

MELHOR MODELO

Três manchas pequenas, duas no hemisfério sul, e atmosfera de **carbono**: $\chi^2/\mathrm{gl} = 1{,}22$, muito à frente de duas manchas ou de hidrogênio.

Um magnetar *massivo*, de campo baixo

$2{,}09^{+0{,}16}_{-0{,}09}\ M_\odot$

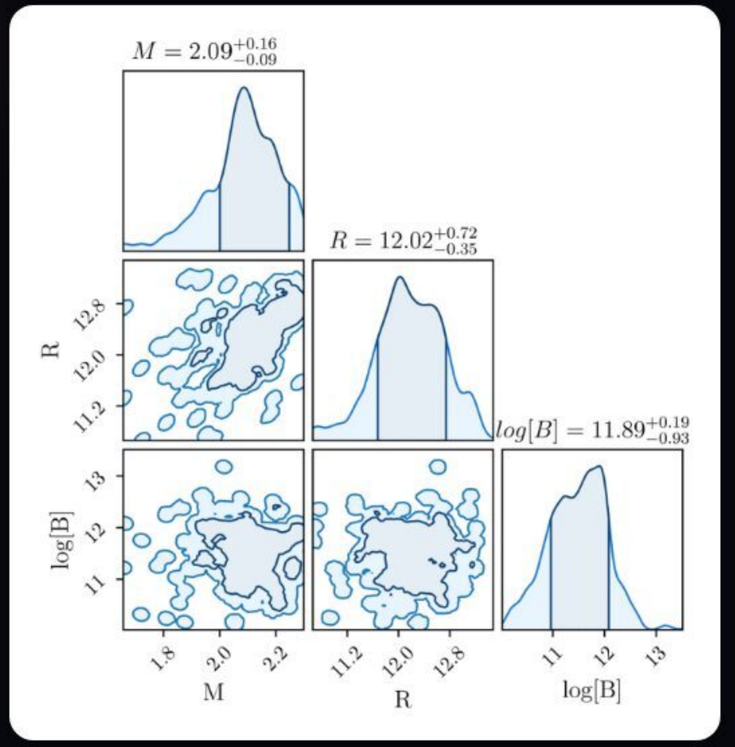
massa (1σ): entre as maiores já estimadas

$12{,}0 \pm 1{,}4$ km

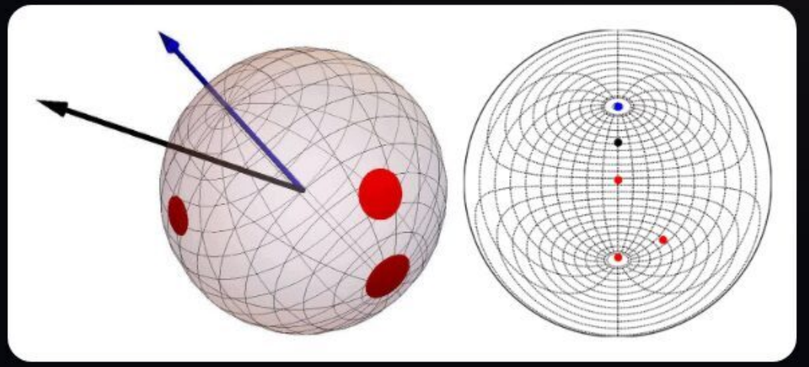
raio (2σ)

$\sim 8\times10^{11}$ G

campo na superfície: log B = $11{,}89^{+0{,}19}_{-0{,}93}$, abaixo do crítico



Posteriores de *M*, *R* e log *B*.



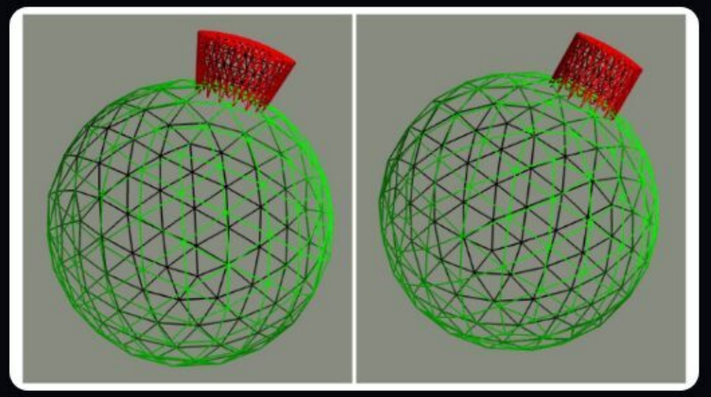
A geometria do melhor ajuste.

Leitura: acreção de material da supernova **enterrou** o campo, que está reemergindo; a atmosfera de carbono viria da queima nuclear difusiva de H/He.

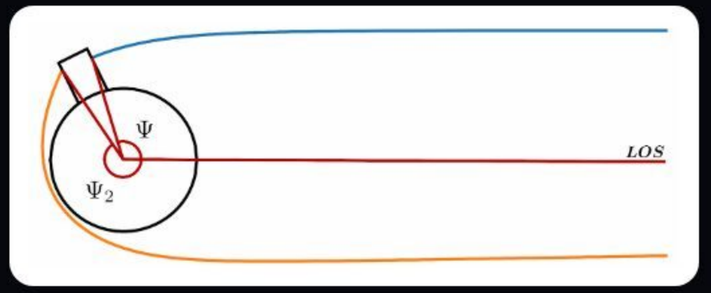
Compacidade $GM/Rc^2 \approx 0{,}26$: favorece equações de estado de rigidez intermediária.

SILVA, DE LIMA, COELHO, STECCHINI, DE LIZ & DE ARAUJO · GALAXIES 11, 18 (2023)

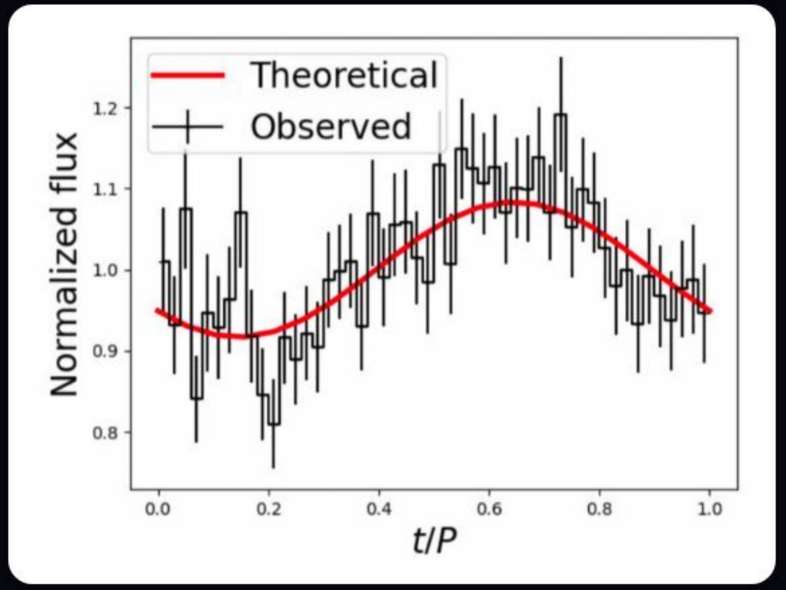
Quando a luz sai *de uma coluna*



A estrela e as colunas (tronco de cone e cilindro) como malha 3D.



Fótons emitidos acima da superfície podem passar por um **periastro** antes de escapar.



1A 0535+262 (NuSTAR, 2018): perfil observado e o modelo de duas colunas.

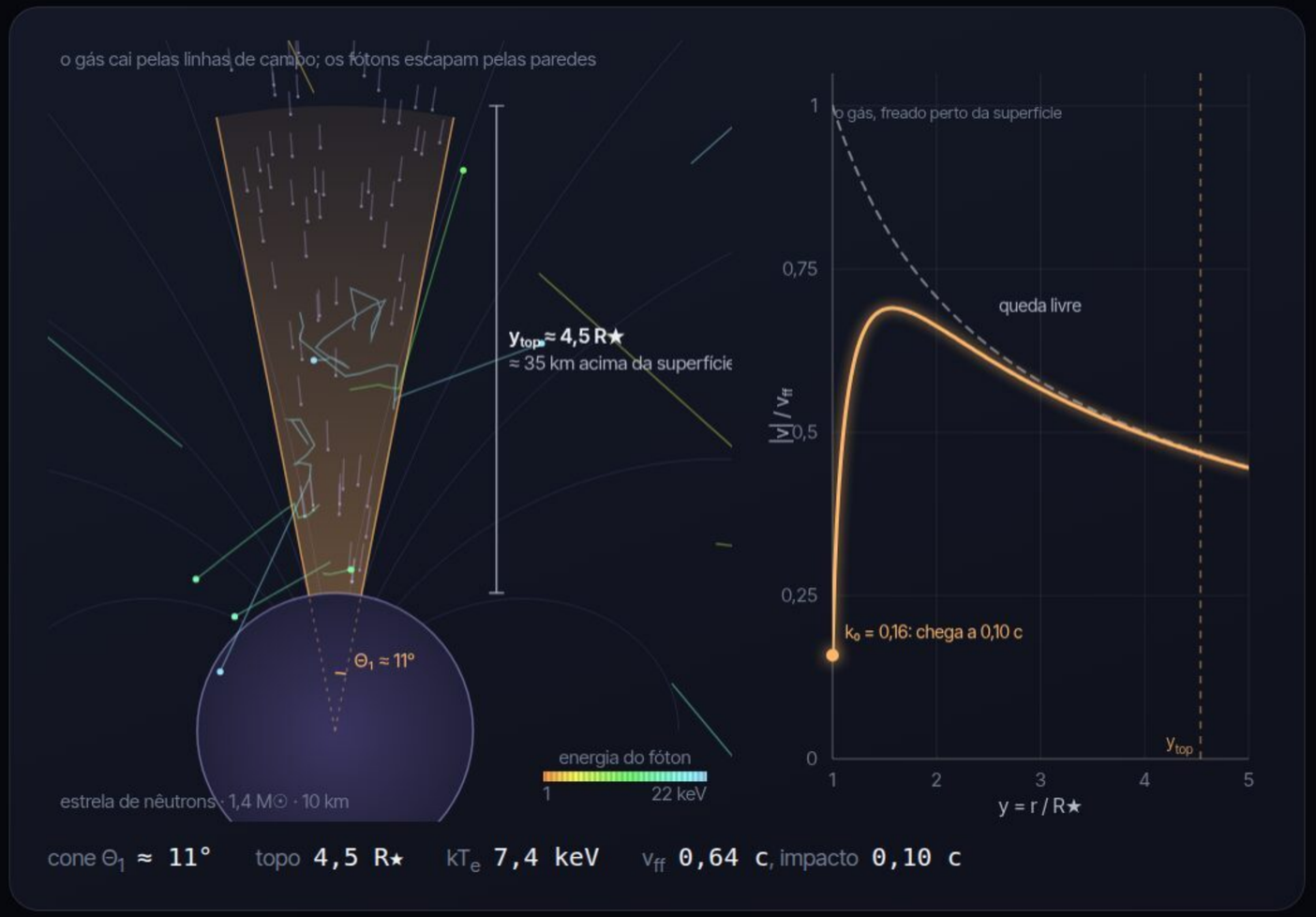
- Em binárias de raios X, a matéria cai pelas linhas de campo e forma **colunas** sobre os polos: a emissão sai pelos lados (feixe em leque).
- Ray tracing **exato** em Schwarzschild, inclusive para pontos acima da superfície, em tabela; Doppler incluído.
- Algoritmo genético para os priores, depois MCMC.

$1{,}53^{+0{,}52}_{-0{,}40}$ $M_\odot$

$12{,}1^{+1{,}1}_{-0{,}9}$ km

SILVA, DE LIMA, COELHO & DE ARAÚJO · SUBMETIDO AO JHEAP (2026) · O MODELO

Dentro da coluna, *pelo espectro*

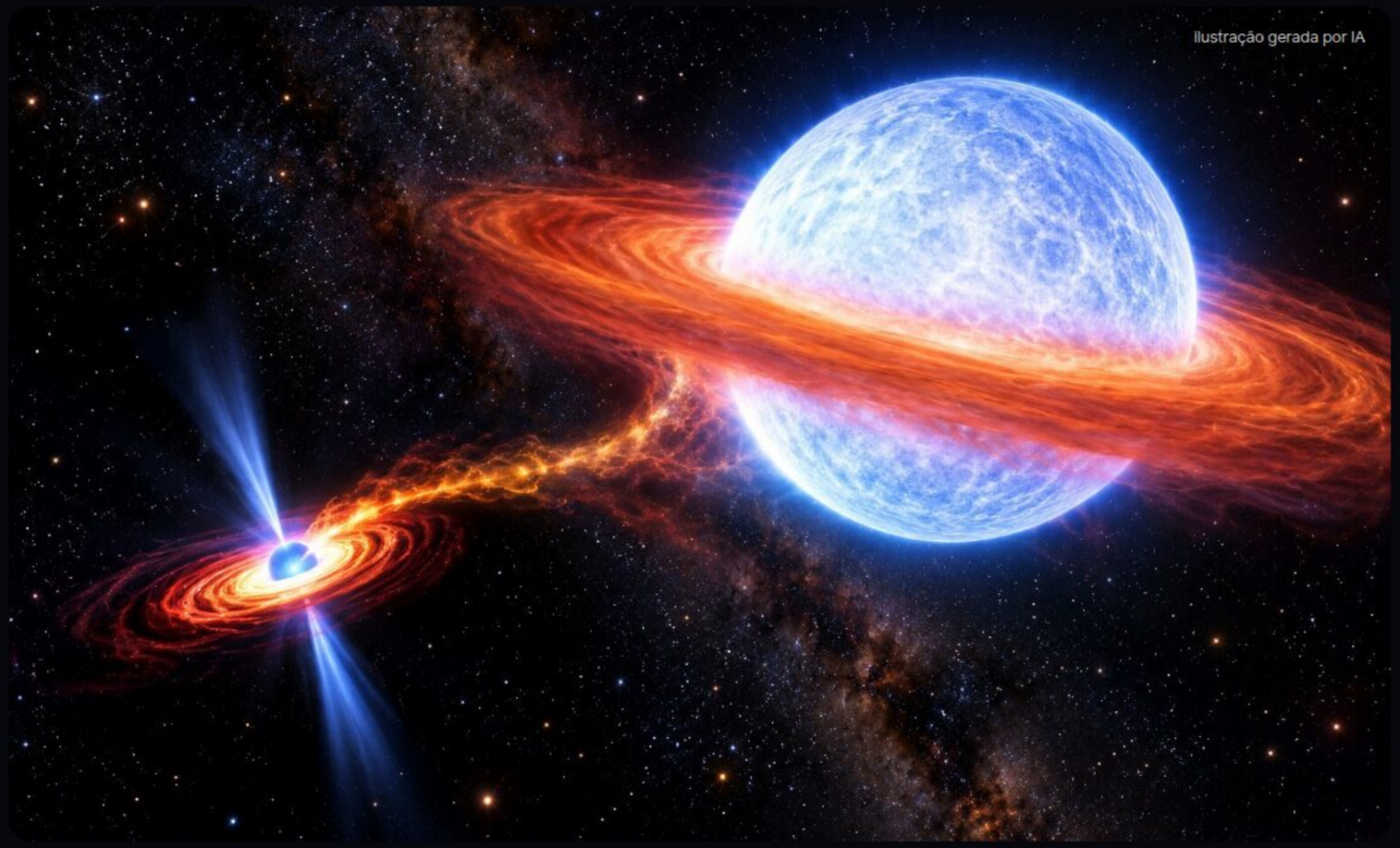


- A mesma estrela do slide anterior, agora pelo **espectro**: NuSTAR, 3–44 keV, $L \approx 3{,}7\times10^{36}$ erg/s — 16 vezes abaixo da luminosidade crítica.
- Modelo de **Becker & Wolff (2022)**: coluna cônica; os fótons ganham energia nos elétrons quentes e no gás que cai (Comptonização térmica e de *bulk*) e escapam pelas paredes.
- 12 parâmetros, 4 cadeias de MCMC independentes de 256 walkers. O posterior tem **dois modos**; o dominante vence por $\Delta\ln\mathscr{P} \approx 55$.

$$v(y) = -v_{\rm ff}\left[\frac{k_\infty^2(y^3-1)+k_0^2}{y^4}\right]^{1/2}$$

y = r/R★ · QUEDA LIVRE NO ALTO, FREADA PERTO DA SUPERFÍCIE

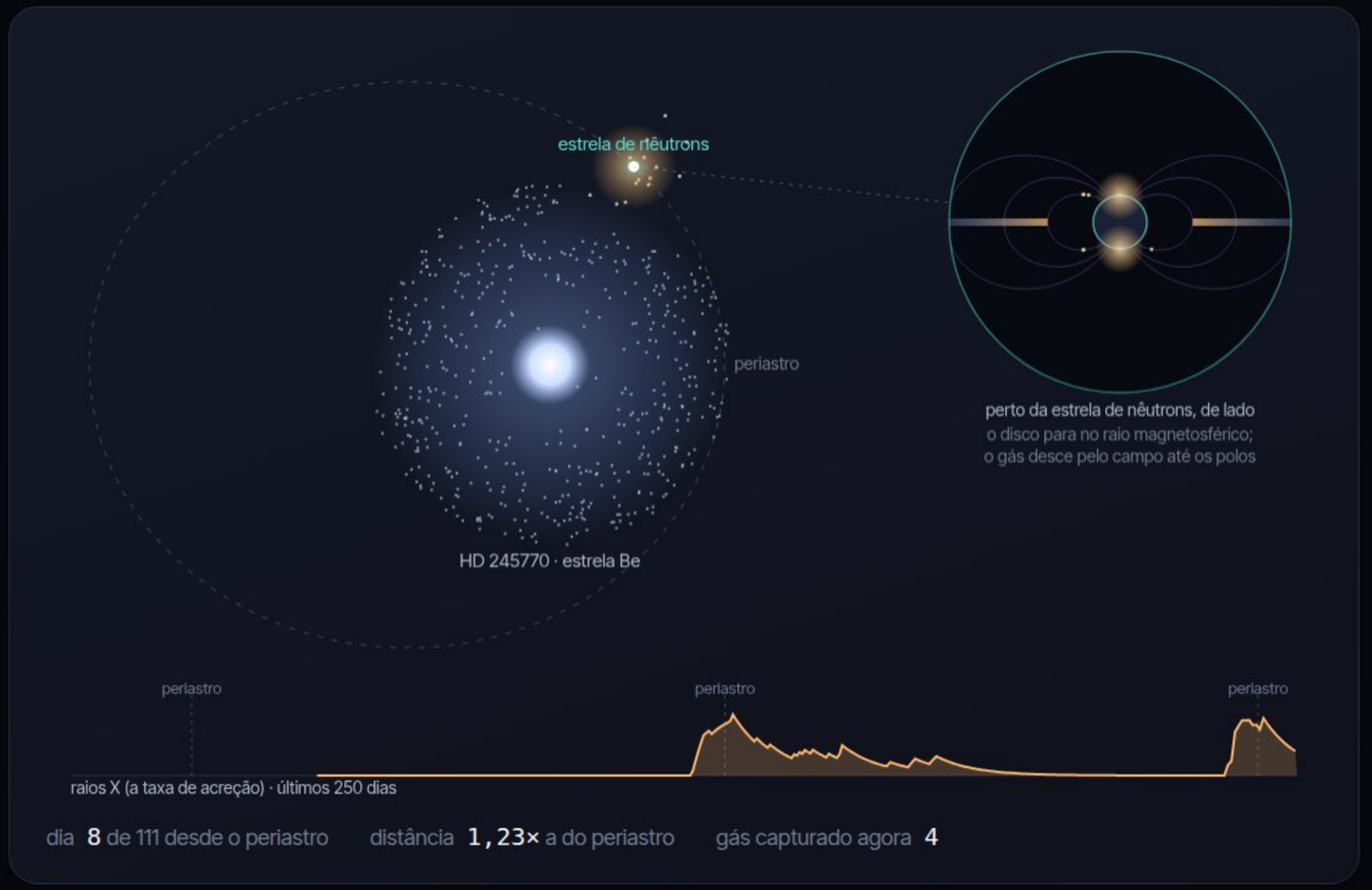
Uma estrela Be: *um disco no equador*



Uma binária Be/X: o disco da estrela Be, o gás arrancado dele e o disco de acreção em volta da estrela de nêutrons.

- Estrelas **Be**: quentes, dos tipos B e O tardio, giram perto do limite de rompimento e perdem gás pelo equador, formando um **disco**.
- O “e” de O9.7–B0 III**e** são as linhas de emissão do hidrogênio, como Hα, que vêm do disco; o perfil de dois picos mostra que ele gira.
- Em 1A 0535+262 a companheira é a **estrela de nêutrons**, numa órbita de 111 dias que passa pela borda do disco — o próximo slide.

De onde vem *o gás da coluna*



- **1A 0535+262**: uma estrela de nêutrons que pulsa a cada 103 s, com $B \approx 5\times10^{12}$ G, em órbita excêntrica — $e \approx 0{,}45$, 111 dias — em torno de **HD 245770**, uma estrela Be (O9.7–B0 IIIe), a 1,8 kpc.
- A estrela Be gira rápido e solta um **disco de gás** pelo equador.
- No periastro a estrela de nêutrons passa pela borda do disco e **rouba gás**: uma explosão em raios X a cada órbita.
- Perto dela, o campo corta o disco no raio magnetosférico e leva o gás até os polos: **as colunas**.

Em 2020, uma explosão gigante chegou a $1{,}2\times10^{38}$ erg/s; em quiescência, ~7×10^{34} erg/s. A órbita tem a excentricidade e o período do sistema; as estrelas, o disco e o detalhe são esquemáticos.

Uma equação para *os fótons da coluna*

$$v\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\varepsilon}{3R^2}\frac{\partial (R^2 v)}{\partial R}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R^2 c}{3 n_e \sigma_\parallel}\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{n_e \sigma \bar{c}}{m_e c^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\varepsilon^4\left(f + kT_e\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\right] - \frac{f}{t_{esc}} + Q(R,\varepsilon)$$

EQUAÇÃO DE TRANSPORTE ESTACIONÁRIA PARA A DISTRIBUIÇÃO DOS FÓTONS, $f(R, \varepsilon)$ · BECKER & WOLFF (2022), GEOMETRIA CÔNICA

ADVECÇÃO
o gás que cai arrasta os fótons, com o $v(y)$ do slide anterior

COMPTONIZAÇÃO DE *BULK*
o fluxo converge: espalhando no gás que cai, os fótons ganham energia

DIFUSÃO
os fótons andam ao longo da coluna, com a seção de choque $\sigma_\parallel$ do campo forte

COMPTONIZAÇÃO TÉRMICA
o termo de Kompaneets: elétrons a T_e levam o espectro para ~kT_e

ESCAPE
os fótons saem pelas paredes num tempo t_{esc}: o feixe em leque

FONTES
fótons-semente: bremsstrahlung, cíclotron e corpo negro da base

COMO SE RESOLVE

$$f_G = \Sigma_n C_n g_n(\tau)\left(\frac{\varepsilon}{kT_e}\right)^{\kappa-4} e^{-\varepsilon/2kT_e} M_{\kappa,\mu}\left(\frac{\varepsilon_{min}}{kT_e}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{\varepsilon_{max}}{kT_e}\right)$$

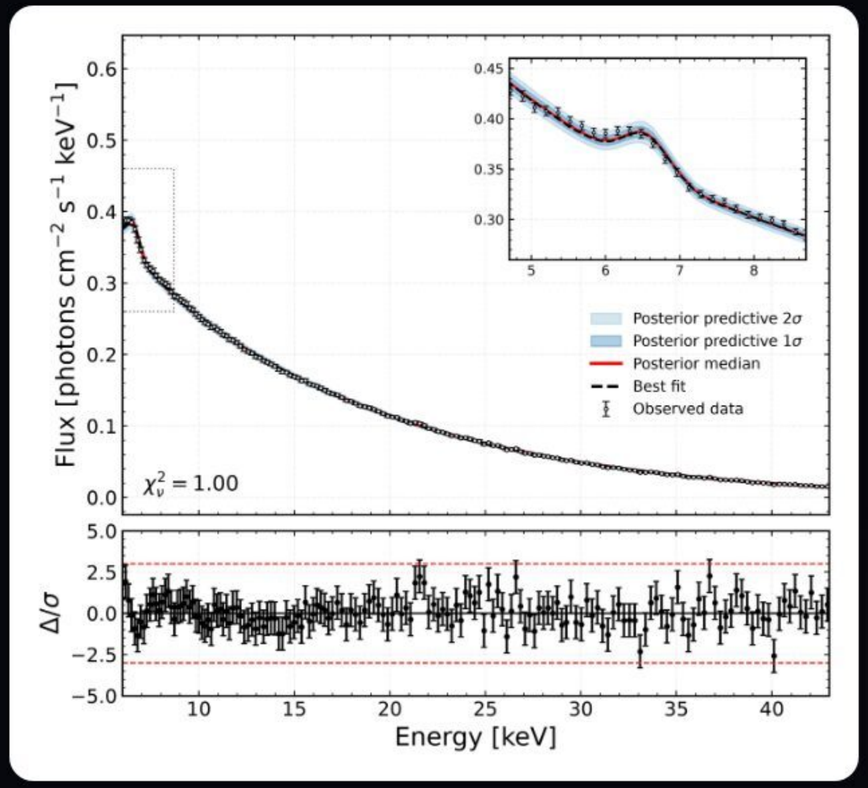
Separação de variáveis: autofunções $g_n(\tau)$ na profundidade óptica e funções de Whittaker na energia. O espectro é essa função de Green convoluída com as fontes, somando parede e topo da coluna. Seções de choque magnéticas com polarização do vácuo; linhas de cíclotron e do ferro, empíricas. A implementação foi conferida equação por equação.

O QUE O MCMC AMOSTRA: 12 PARÂMETROS

α velocidade · ξ difusão · ψ bulk/térmica · θ_0 abertura · k_0 impacto · y_{top} altura · T_e elétrons · $\dot{M}$ acreção · B campo · d_{Fe} ferro · f_{sys} sistemática · D distância

Fixos: $M = 1{,}4\ M_\odot$, $R_\star = 10$ km, N_H e a linha de cíclotron, fora da banda. B tem prior pela linha (46,3 keV). A verossimilhança é gaussiana, com a sistemática f_{sys}, e cobra o orçamento $L_{acc} = GM\dot{M}/R_\star$ dentro de um fator 2.

Uma coluna quente e alta — *e uma peça faltando*



O espectro NuSTAR e o posterior (mediana e faixas de 1σ e 2σ), com os resíduos. No detalhe, a linha do ferro.

8,56 $\times 10^7$ K

temperatura dos elétrons, a 1% · kT ≈ 7,4 keV

4,5 $R_\star$

topo da coluna, ~35 km acima da superfície

0,070

ψ, bulk/térmica: a Comptonização **térmica** domina

$\log \theta_0 - 1{,}36 \log \dot{M} = -22{,}32 \pm 0{,}10$

o espectro fixa a combinação: mais $\dot{M}$, coluna mais larga

UMA PEÇA FALTANDO

O campo sai 2,3σ acima do da linha de cíclotron — que ficaria em 55 keV, não nos 46 medidos — e os resíduos andam juntos (teste de corridas: z = −3,7). Candidata: recombinação entre níveis de Landau excitados, vista nesta fonte e ausente do modelo.

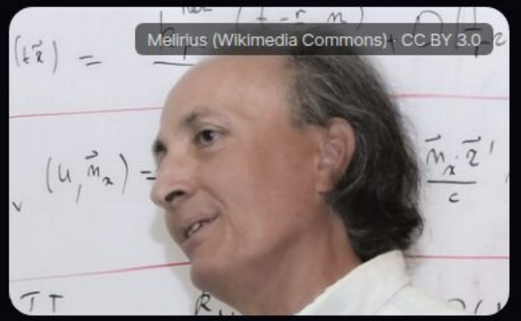
Modo dominante do posterior. χ^2_ν = 1,00 com a incerteza sistemática livre não é teste de ajuste: o diagnóstico são os resíduos.

BRANS & DICKE 1961 · DAMOUR & ESPOSITO-FARÈSE 1993

E se a gravidade *não for a de Einstein?*



Carl Brans
1935 – 2022



Thibault Damour
n. 1951

O QUE É "ACOPLAR-SE À MATÉRIA"

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\, g_{\mu\nu}$$

A MÉTRICA QUE A MATÉRIA SENTE

A matéria mede distâncias e tempos com $\tilde{g}$: as suas réguas e relógios mudam com ϕ. A luz não percebe — uma troca conforme não muda as geodésicas nulas —, mas o raio que a matéria mede é $R = A_s R_E$.

$$\alpha(\varphi) = \frac{d \ln A}{d\varphi}$$

A FORÇA DO ACOPLAMENTO

A matéria é fonte do campo, $\Box\phi = -4\pi G\alpha T$, e sente uma força a mais, $\propto \alpha\nabla\phi$: entre dois corpos, $G_{ef} = G(1 + \alpha^2)$.

Nas teorias **escalar-tensoriais**, além da métrica há um campo escalar ϕ que se acopla à matéria. No Sistema Solar o acoplamento é minúsculo ($\alpha^2 < 10^{-5}$, pela sonda Cassini); numa estrela de nêutrons pode ocorrer **escalarização espontânea**: com $A = e^{\beta\phi^2/2}$ e $\beta \lesssim -4{,}35$, $\phi = 0$ fica instável e o campo cresce sozinho, como uma magnetização espontânea.

Fora da estrela, a métrica deixa de ser a de Schwarzschild: é a **métrica de Just**, com uma carga escalar Q:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{b/a} dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-b/a} dr^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{1-b/a} r^2 d\Omega^2$$

$b = 2GM/c^2$ · $a/b = \sqrt{1 + Q^2}$ · REFERENCIAL DE EINSTEIN

Duas estrelas com a **mesma massa e o mesmo raio** — "doppelgängers" — curvam a luz de maneiras diferentes. A curva de luz pode separar as teorias.

A mesma estrela, *outra gravidade*

• M = 2,1 M⊙ · UMA MANCHA DE 10° · ι = θ = 90° · ESTRELA ESTÁTICA · INTEGRAL EXATA

RG | ETE 1 · A_s = 0,95 | ETE 2 · A_s = 1,05

a estrela vista de longe · tracejado: o tamanho na RG



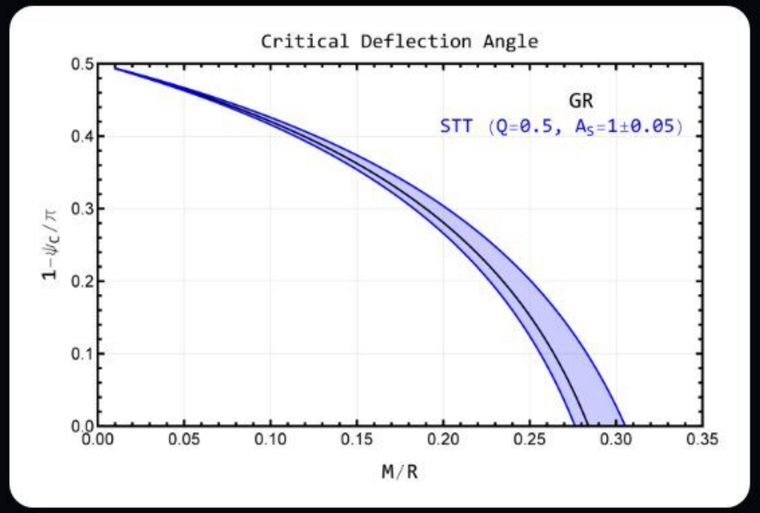


compacidade, GM/Rc^2 0,284

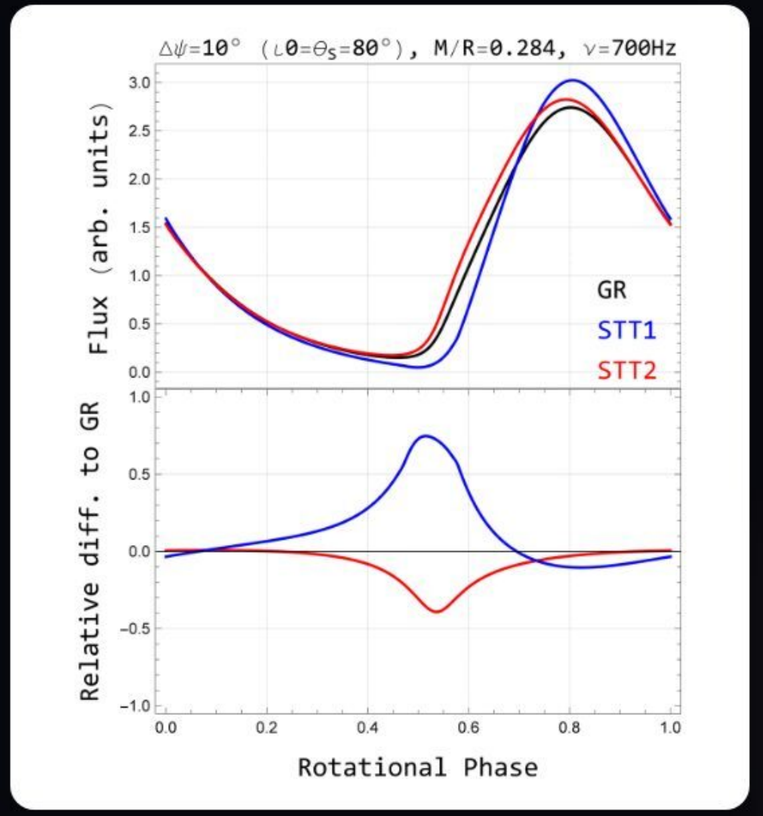
carga escalar, Q 0,50

ETE 1: ψ_c 0,903π RG: ψ_c 1,000π zona invisível 17,4° R 10,92 km raio aparente 16,88 km PF 1,00

Até *80%* de diferença no fluxo



O ângulo crítico contra *M*/*R*: a linha da RG e a faixa escalar-tensorial.



Girando a 700 Hz, com Doppler e atrasos: fluxo e diferença relativa à RG.

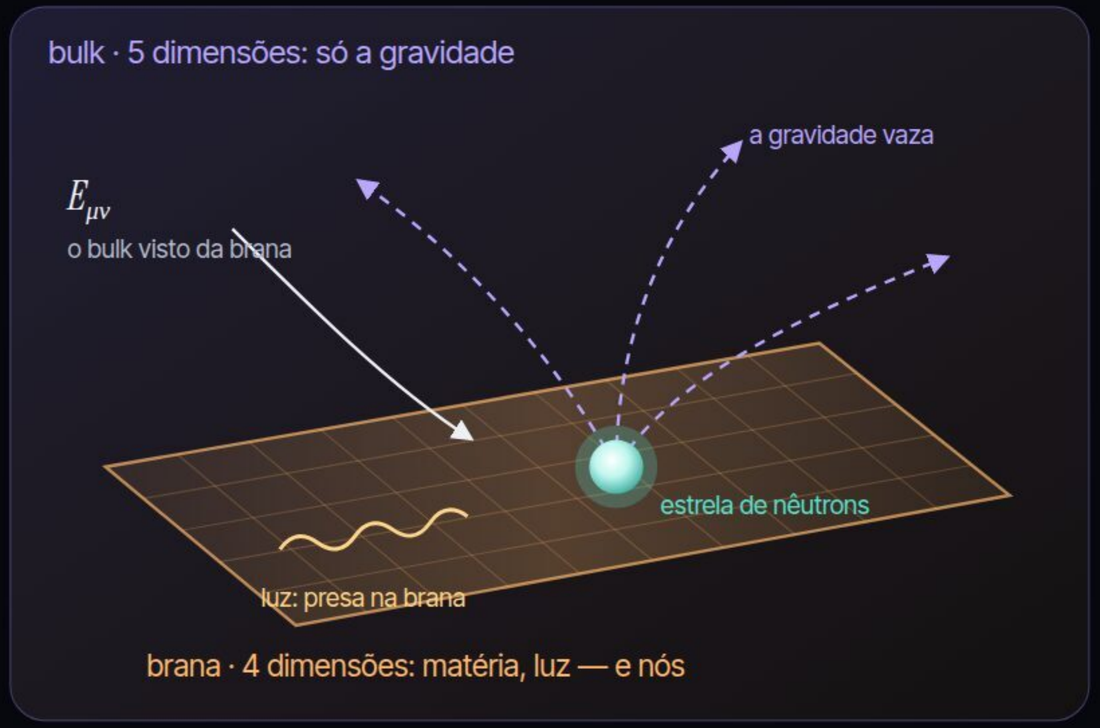
- A compacidade em que $\psi_c = \pi$ vai de **0,275 a 0,305** na teoria escalar-tensorial, contra 0,284 na RG.
- O fluxo de uma mancha difere da RG em até **~80%**.
- O raio muda até **~10%** para os mesmos parâmetros da estrela: hoje, isso limita $Q \lesssim 0{,}5$.
- Com o NICER, J0740+6620 tem $C = 0{,}21$–$0{,}28$: ainda não separa as teorias.

PERSPECTIVA

Raios com incerteza menor — eXTP, NewAthena, e as ondas gravitacionais de Einstein Telescope e LISA — podem limitar as teorias escalar-tensoriais pela **forma do pulso**.

RANDALL & SUNDRUM 1999 · SHIROMIZU, MAEDA & SASAKI 2000

O Universo numa *membrana*



No **braneworld**, o nosso Universo é uma hipersuperfície de quatro dimensões — a **brana** — dentro de um espaço com uma dimensão a mais, o **bulk**. Matéria e luz ficam presas na brana; só a gravidade se propaga no bulk.

A ideia aparece para atacar o problema da hierarquia (por que a gravidade é tão fraca) e o da constante cosmológica e da expansão acelerada.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{48\pi}{\lambda} S_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}$$

SHIROMIZU, MAEDA & SASAKI 2000 · $\kappa_5^4 = 48\pi/\lambda$ ($G = c = 1$)

- $S_{\mu\nu}$: correções **locais**, quadráticas na matéria ($\propto T^2$). Num fluido, somam $\rho^2/2\lambda$ à densidade: pesam quando ρ se aproxima da **tensão da brana** λ.
- $E_{\mu\nu}$: o tensor de **Weyl** do bulk projetado na brana — **não local**: não se calcula só com o que existe na brana.
- Para $\lambda \to \infty$ e $E_{\mu\nu} \to 0$, volta a Relatividade Geral.

No artigo: um fechamento efetivo em 4D, inspirado no cenário de Sahni–Shtanov (2003) — não uma solução completa do bulk em 5D.

Mesma física nuclear, *outra gravitação*

A equação de estado da matéria (SLy) **não muda**. Muda o quanto ela **gravita**: a estrela passa a sentir uma densidade e uma pressão efetivas.

$$\rho_{ef} = \rho + \frac{\rho^2}{2\lambda} + \rho_{\mathcal{W}}$$

$$p_{ef} = p + \frac{p\rho}{\lambda} + \frac{\rho^2}{2\lambda} + p_{\mathcal{W}}$$

TERMO LOCAL (λ) · SETOR DE WEYL ($\mathcal{W}$)

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_{ef}$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p)\,\frac{m + 4\pi r^3 p_{ef}}{r(r - 2m)}$$

A MATÉRIA SE CONSERVA: O FATOR $(\rho + p)$ É O DE SEMPRE

O termo local **aumenta a atração** e encolhe a estrela — mas só quando ρ se aproxima de λ. No centro de uma estrela de nêutrons $\rho \approx 2\times10^{-3}$ km^{-2}; com $\lambda \sim 10^{4}$ km^{-2}, $\rho/\lambda \sim 10^{-7}$.



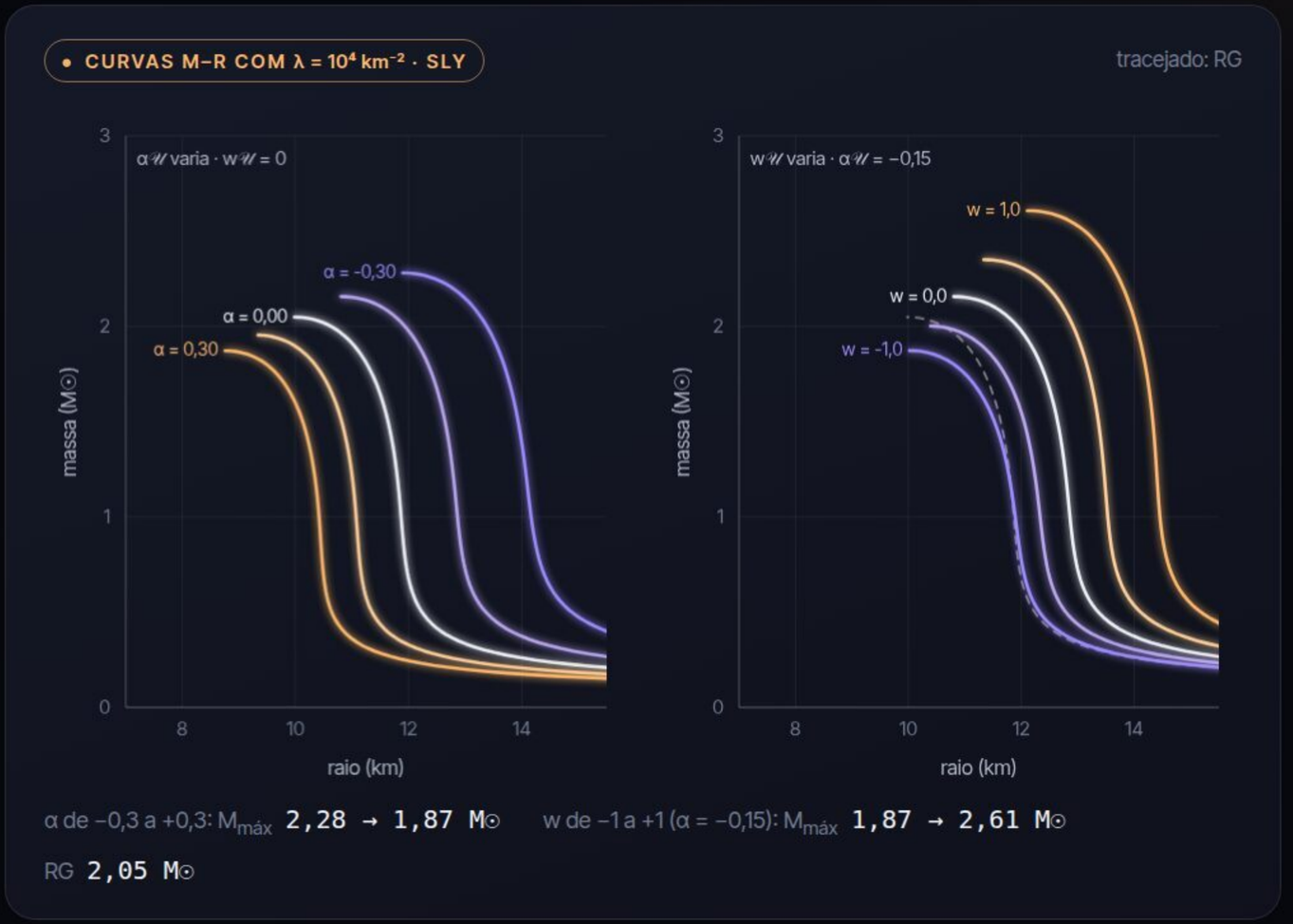
O setor de Weyl: *blindagem* ou atração extra

$E_{\mu\nu}$ é a marca do campo gravitacional do bulk na brana. Ali ele age como um **fluido efetivo** — em cosmologia, a "radiação escura". Só que a brana não determina esse fluido: é preciso um **fechamento**.

$$\rho_{\mathscr{U}} = \alpha_{\mathscr{U}}\,\rho \qquad p_{\mathscr{U}} = w_{\mathscr{U}}\,\rho_{\mathscr{U}}$$

Fechamento isotrópico; a tensão anisotrópica do Weyl ($\Delta_{\mathscr{U}}$) fica para trabalhos futuros.

SE…	EFEITO NA ESTRELA
$\alpha_{\mathscr{U}} < 0$	$\rho_{ef} = \rho(1 + \alpha_{\mathscr{U}}) < \rho$: **blindagem** — menos massa gravitando, estrelas maiores e mais pesadas
$\alpha_{\mathscr{U}} > 0$	mais atração: estrelas menores e mais leves
$w_{\mathscr{U}}$	só aparece como $w_{\mathscr{U}}\alpha_{\mathscr{U}}\rho$ na pressão efetiva: pesa pouco quando $\alpha_{\mathscr{U}}$ é pequeno, e pode **compensar** $\alpha_{\mathscr{U}}$

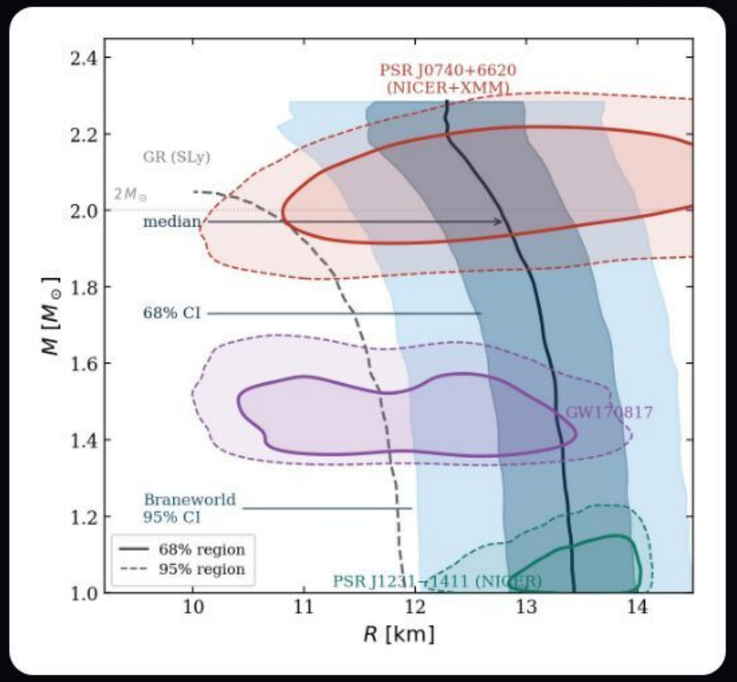


Tensão alta, Weyl *levemente negativo*

DADOS E INFERÊNCIA

GW170817 (raios da deformabilidade de maré) + NICER: PSR J0740+6620 e PSR J1231−1411 — os dois, resultados de **ray tracing** de perfis de pulso. MCMC de ensemble (4 × 32 caminhantes × 3 000 passos, 288 000 amostras), priores centrados em λ grande e nos valores da RG.

	MEDIANA	68%	RG
$\log_{10}(\lambda/\mathrm{km}^{-2})$	3,98	2,54 – 5,50	∞
$\alpha_{\mathcal{W}}$	−0,15	−0,23 – 0,15	0
$w_{\mathcal{W}}$	0,24	−0,78 – 0,61	0
$M_{\mathrm{máx}}$ ($M_\odot$)	2,30	2,22 – 2,44	2,05
$R_{1,4}$ (km)	13,31	12,74 – 13,85	11,76



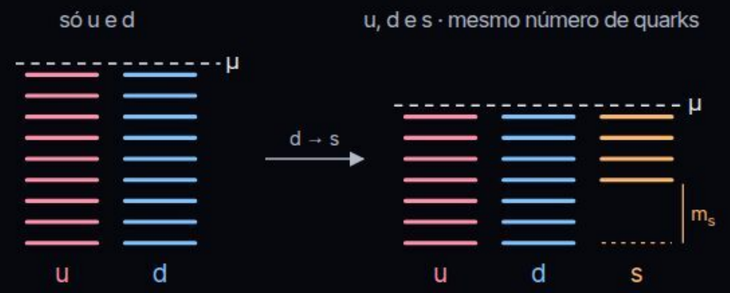
A faixa M–R do posterior (68% e 95%), a RG+SLy (tracejado) e os vínculos usados.

- **$\lambda \sim 10^4\ \mathrm{km}^{-2}$**: o termo local some ($\rho/\lambda \sim 10^{-7}$). O posterior quase repete o prior: os dados são *compatíveis* com tensão alta, não medem λ.
- **$\alpha_{\mathcal{W}} < 0$ em 83% das amostras**: uma blindagem leve. É o setor de Weyl, e não o termo local, que empurra a curva para a direita.
- **Um ramo secundário (17%)**: $\alpha_{\mathcal{W}} > 0$ com $w_{\mathcal{W}} < 0$ se compensam — $R_{1,4}$ menor, $M_{\mathrm{máx}}$ maior, compacidade perto do limite imposto.
- **$M_{\mathrm{máx}} \approx 2{,}3\ M_\odot$**: compatível com PSR J0952−0607 (2,35 ± 0,11 $M_\odot$). GW190814 (2,50–2,67 $M_\odot$) só cabe na cauda de 95%.
- **O recado**: estrelas mais pesadas não são uma previsão genérica do braneworld — dependem do **sinal do setor de Weyl**.

ITOH 1970 · BODMER 1971 · WITTEN 1984 · A HIPÓTESE DA MATÉRIA ESTRANHA

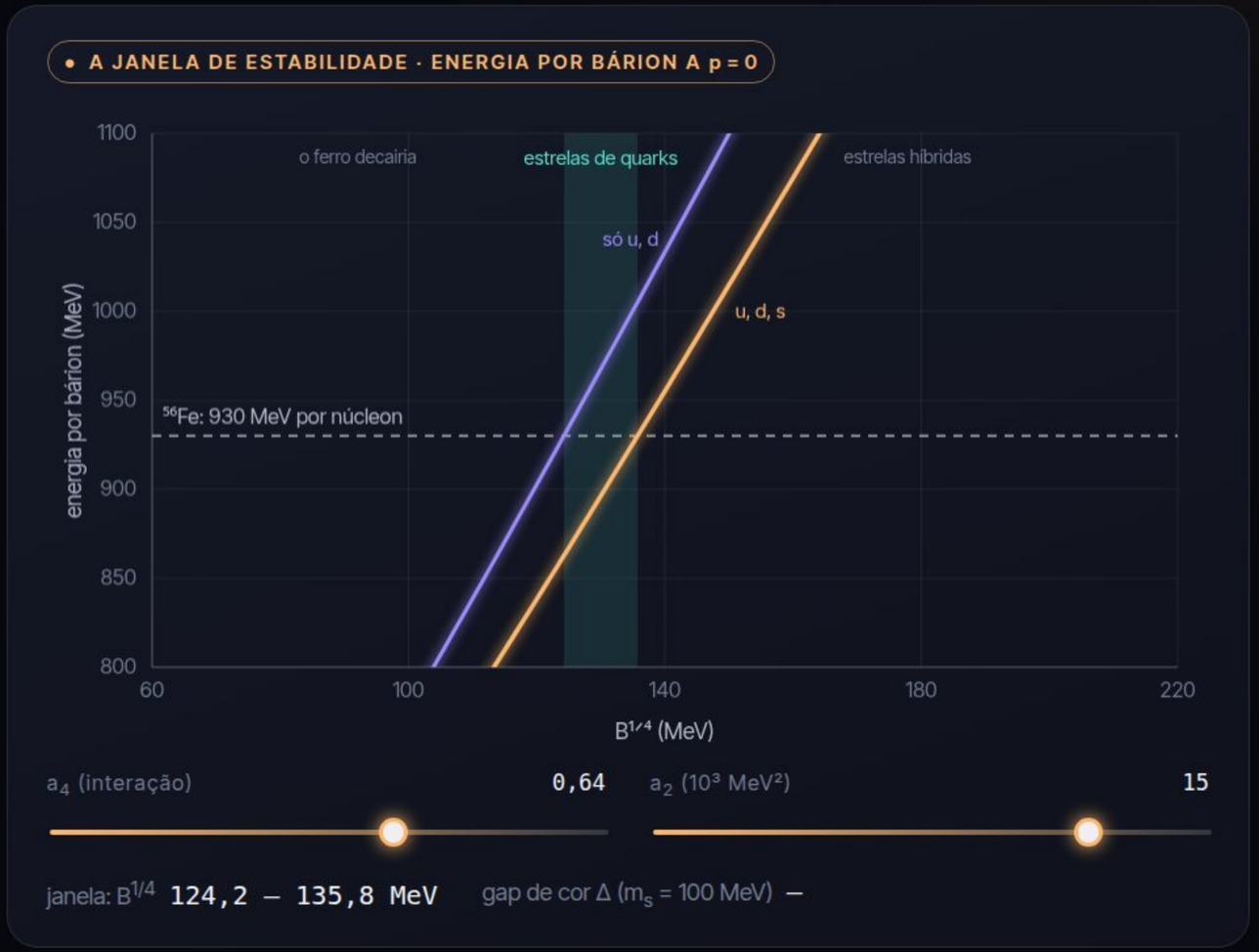
E se o ferro *não for* o fundo do poço?

Em densidades extremas os nêutrons podem se desfazer em quarks. A hipótese de Bodmer e Witten vai além: a matéria de quarks **u, d e s** seria o **estado fundamental** da matéria — com energia por bárion menor que a do ^{56}Fe, 930 MeV.



Pauli: cada sabor tem o seu mar de Fermi. Um terceiro sabor abre níveis novos, e o topo (μ) desce — mesmo pagando a massa do s.

- Os núcleos não decaem porque precisariam de ~A conversões fracas d → s **simultâneas**.
- E a matéria só de u e d precisa ser **instável** — senão o próprio ferro já teria virado quarks.
- Se valer, "estrelas de nêutrons" podem ser **estrelas de quarks**, presas pela interação forte.



A QCD densa em *três números*

$$\omega = -\frac{3a_4}{4\pi^2}\mu^4 + \frac{3a_2}{4\pi^2}\mu^2 + B$$

POTENCIAL TERMODINÂMICO · $p = -\omega$ · μ: POTENCIAL QUÍMICO DOS QUARKS

$a_4 = 1 - c$	a **interação forte**. $a_4 = 1$ são quarks livres; a QCD perturbativa sugere $c \gtrsim 0{,}3$
$a_2 = m_s^2 - 4\Delta^2$	a massa do quark s contra o **gap** Δ da supercondutividade de cor (fase CFL) — pode ser negativo
B	a **constante de sacola**: o custo de abrir o vácuo da QCD

Na superfície $p = 0$, mas a densidade não: $\rho_s \approx 4B \sim 10^{14}$–$10^{15}$ g/cm^3. A estrela é **autoligada**: em massas pequenas, $M \propto R^3$, ao contrário da estrela de nêutrons.

TOV + a equação de maré com o salto da superfície ($\Delta y = -4\pi R^3 \rho_s / M$), resolvidas aqui. O exemplo do artigo dá 2,19 M⊙, 11,97 km e $\Lambda = 852$ — o painel reproduz.

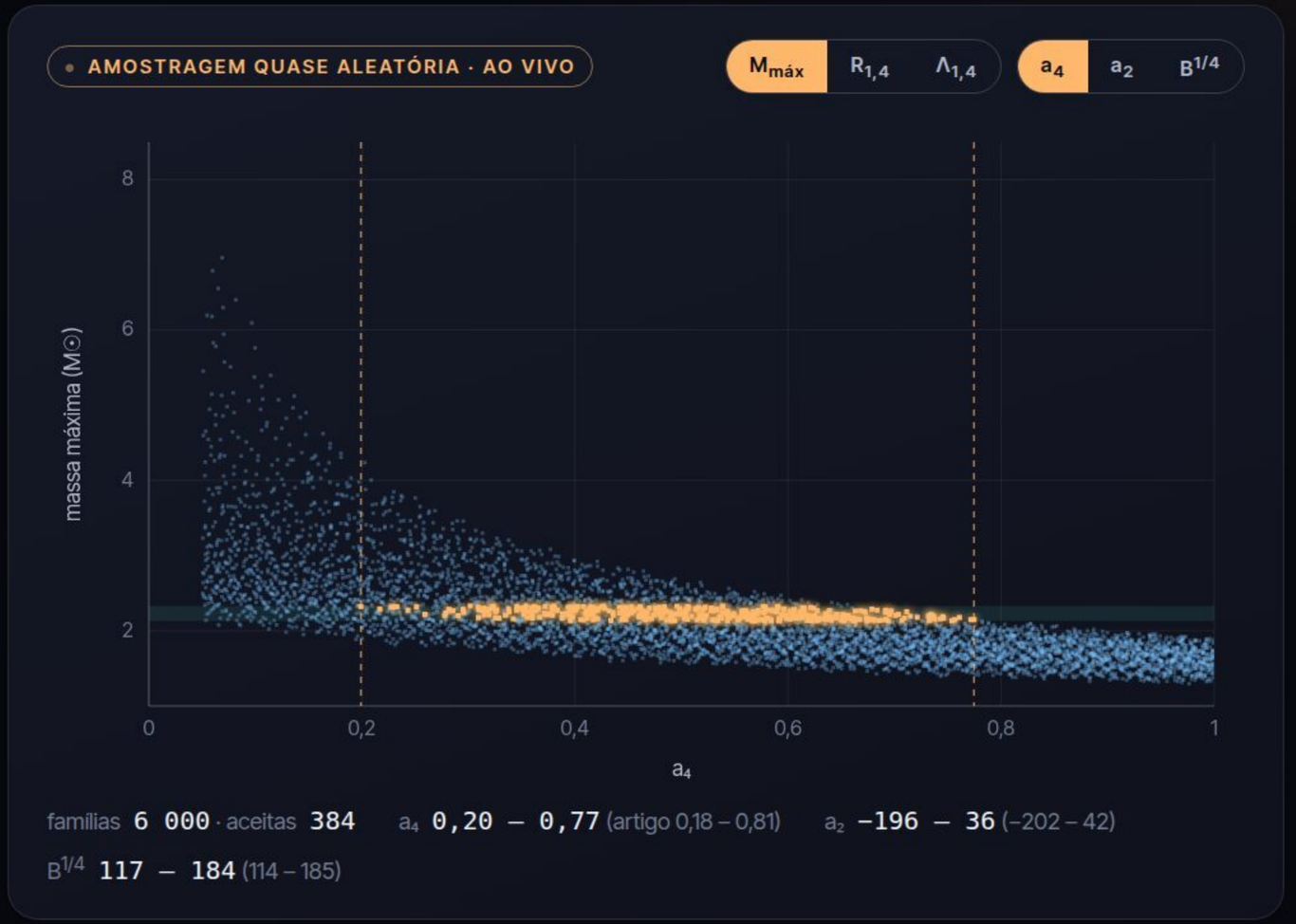


Milhares de estrelas *sorteadas*

Cada ponto (a_2, a_4, B) dentro da janela de estabilidade é uma **família inteira** de estrelas: TOV para M e R, a equação de maré para Λ. O artigo sorteou **263 287** pontos por hipercubo latino; aqui o navegador sorteia os seus, ao vivo.

	FAIXA ACEITA	DE ONDE VEM
$M_{máx}$	2,13 – 2,33 M⊙	pulsares em binárias (Romani et al. 2022) · GW170817 + GRB 170817A (Rezzolla et al. 2018)
$R_{1,4}$	10,00 – 13,25 km	raios do NICER — **ray tracing** — e de ondas gravitacionais (compilação de Pang et al. 2023)
$\Lambda_{1,4}$	< 970	deformabilidade de maré de GW170817

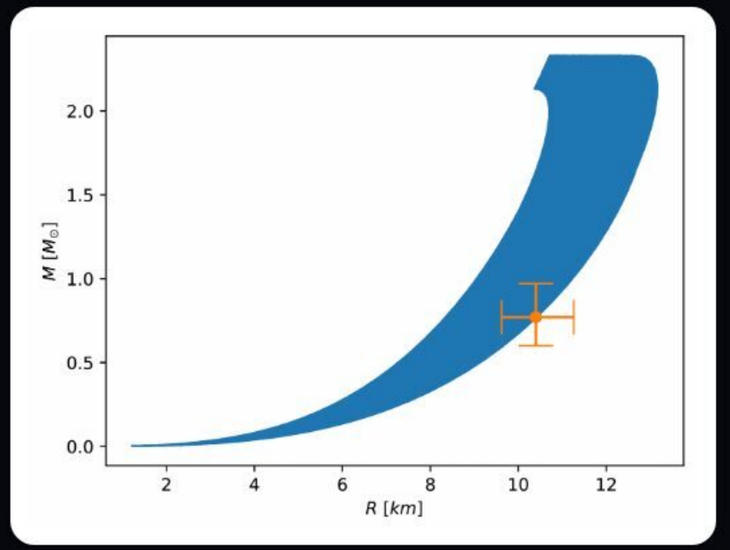
Âmbar: as famílias que passam nos três testes. As linhas tracejadas mostram até onde vão os aceitos — e convergem para os limites do artigo.



Quarks que *interagem*, superfície densa

VÍNCULOS COMBINADOS	FAIXA
a_4	0,18 – 0,81
a_2 (10^3 MeV²)	−202 – 42
$B^{1/4}$ (MeV)	114 – 185
$R_{1,4}$ (km)	10,00 – 12,26
$\Lambda_{1,4}$	270 – 970
$\rho_{superfície}$ (10^{15} g/cm³)	0,29 – 0,60
c_s/c	0,51 – 0,85

A velocidade do som passa de $c/\sqrt{3} \approx 0{,}58$ — o limite conforme da QCD em densidade infinita — quando $a_2 < 0$.



Todas as curvas M–R que passam nos vínculos, com XMMU J173203.3−344518 (laranja).

- **$a_4 \lesssim 0{,}81$**: a matéria se afasta pelo menos **20%** dos quarks livres. As interações fortes não podem ser desprezadas, em nenhuma massa.
- **$\Delta \lesssim 230$ MeV** (com $m_s = 100$ MeV), do limite inferior de a_2 — de acordo com o limite independente de $\lesssim 216$ MeV (Kurkela et al. 2024).
- **A superfície salta do vácuo para 1,1–2,2 ρ_{sat}**: um número que entra na maré, nos modos de oscilação e nas montanhas da estrela.
- **$R_{1,4} = 10{,}0$–$12{,}3$ km**, como uma estrela de nêutrons: o raio sozinho não distingue as duas; a maré pode.
- **XMMU J1732−344** (0,77 M⊙, 10,4 km, em HESS J1731−347) cai nas curvas sem esforço — uma candidata a estrela de quarks, se o modelo de atmosfera do raio estiver certo.

PEREIRA, OTTONI, COELHO, RUEDA & DE LIMA · PRD 110, 103014 (2024)

Quando o núcleo e a crosta *não giram juntos*

Quase todo cálculo trata o pulsar como um **corpo rígido**. Mas o interior pode ser superfluido, ter uma transição de fase — um caroço de quarks — ou ganhar camadas acretadas que giram diferente, como na tacoclina do Sol.

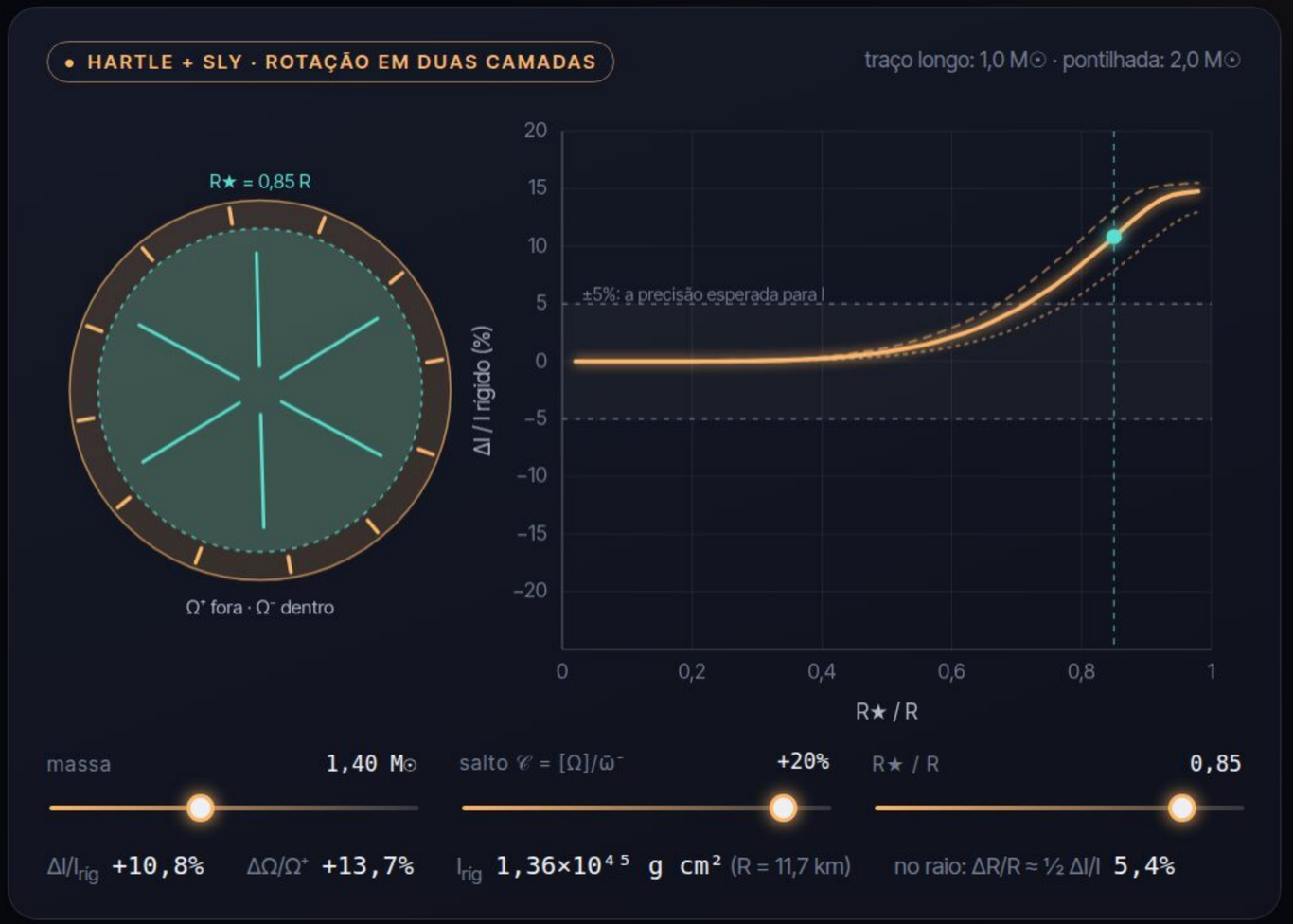
$$\frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}(r^4 j\,\omega') + \frac{4j}{r}\,\omega = 0$$

ARRASTO DE REFERENCIAIS NA ROTAÇÃO LENTA · HARTLE 1967 · $\bar{\omega} = \Omega - \omega$

$$[\omega]_{R\star} = [\Omega],\ [\omega']_{R\star} = 0 \cdot I = \frac{J}{\Omega^+}$$

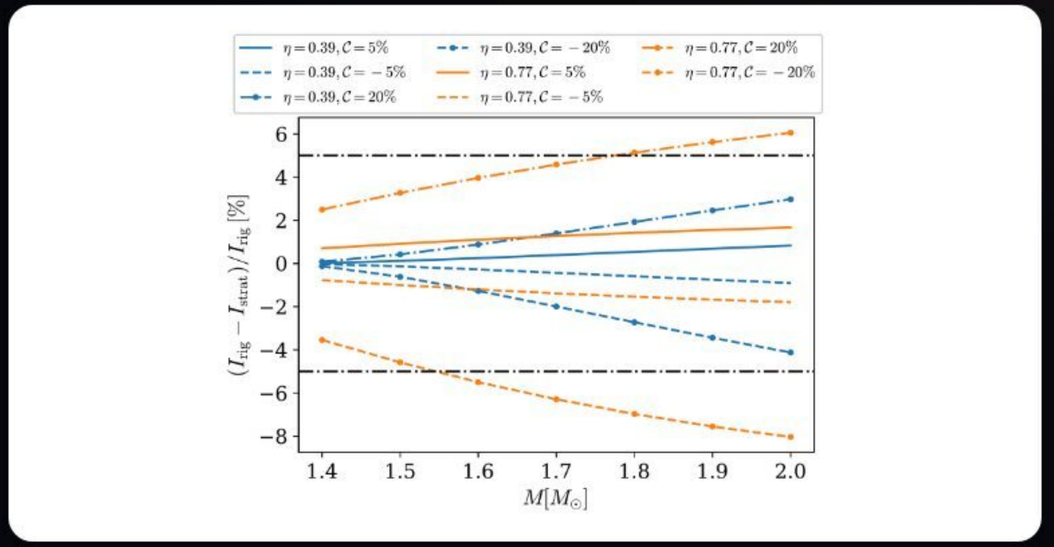
O SALTO EM R★, DEDUZIDO NO ARTIGO · Ω^+: A ROTAÇÃO DA SUPERFÍCIE, A QUE A CRONOMETRAGEM MEDE

O J vem da derivada de ω na superfície, e por isso **sente o salto**: a mesma estrela, com o mesmo Ω^+, tem outro momento de inércia.



Rotação rígida é uma *hipótese* — e tem custo

- **Perto da superfície, ΔI/I → ΔΩ/Ω**⁺; abaixo de ~40% do raio, o efeito some. Cresce depressa para R★ ≳ 0,6 R, e mais nas estrelas leves.
- **Estrelas híbridas**: o salto fica na transição para o caroço de quarks, e só passa de 5% com $\mathscr{C}$ ~ 20% e R★ ≳ 0,8 R (figura).
- **No raio**: com a massa conhecida, ΔR/R = ½ ΔI/I. Dez por cento em I são 5% em R — o tamanho das barras do NICER, que vêm de **ray tracing**.
- **Medida direta de I**: o pulsar duplo J0737−3039A deve dar I com 11% até 2030 (hoje, I_{45} = 1,15–1,48). Saltos de 10–20% em Ω não se distinguem da rotação rígida.
- **Energia**: com I 10–20% maior, cinco pulsares de raios gama do Fermi com $L_\gamma >$ Ė voltam a caber na energia de rotação.
- **I-Love-Q**: o quadrupolo depende de outra função além de J — as relações universais enfraquecem. E nos **CCOs**, camadas acretadas podem girar diferente por até ~10 mil anos.



Estrelas híbridas (η = 0,39 e 0,77): Δ*I*/*I* com o salto na transição de fase, contra a massa.

PULSAR (FERMI)	$L_\gamma/\dot{E}$, I_0	+10%	+20%
J1057−5851	1,19	> 1	0,99
J1522−5735	1,09	0,99	0,91
J1650−4601	1,11	> 1	0,92

CONCLUSÕES

Da geometria *à observação* — e de volta

- Numa estrela de nêutrons, desvio da luz, redshift e atrasos **não são correções**: definem a imagem e a curva de luz.
- O ray tracing de trás para a frente — com a integral exata quando a compacidade pede — liga a métrica ao que um telescópio mede.
- Aplicado a dados do Chandra, do XMM-Newton e do NuSTAR, deu massa, raio, campo e a geometria das manchas de magnetares e de uma estrela acretante — e, pelo espectro, a temperatura e a altura da sua coluna.
- Como a curva de luz depende só da métrica exterior, ela também **testa a gravidade**: teorias escalar-tensoriais e braneworld.
- E o interior conta: **estrelas de quarks** e **rotação estratificada** mudam o M, o R e o I que o ray tracing mede.

PRÓXIMOS PASSOS

- Atmosferas magnetizadas e ray tracing exato juntos, para as estrelas isoladas que esfriam.
- Rotação rápida e métricas além de Schwarzschild nos mesmos ajustes.
- Os dados da próxima geração: eXTP, NewAthena, STROBE-X.

Os painéis deste seminário rodam no navegador: *rafael-lima.pages.dev/talks*.

CRÉDITOS DAS IMAGENS

Fotos e figuras *de uso livre*

Albert Einstein — Ferdinand Schmutzer / Adam Cuerden · domínio público

Karl Schwarzschild — autor desconhecido · domínio público

M87* (EHT) — Event Horizon Telescope Collaboration · CC BY 4.0

Sgr A* (EHT) — EHT Collaboration · CC BY 4.0

Jocelyn Bell, 1967 — Roger W Haworth · CC BY-SA 2.0

Antony Hewish — Woodruff T. Sullivan III / NRAO/AUI Archives (NRAO/AUI/NSF) · CC BY 4.0

Registro de CP 1919, 1967 — Bill Thompson (Billthom) · CC BY-SA 4.0

Estrela de nêutrons sobre Manhattan — NASA's Goddard Space Flight Center · domínio público

Eclipse de 1919 — ESO/Landessternwarte Heidelberg-Königstuhl/F. W. Dyson, A. S. Eddington, & C. Davidson · CC BY 4.0

SMACS 0723 (JWST) — NASA, ESA, CSA, and STScI · domínio público

NICER — NASA · domínio público

XMM-Newton — ESA/XMM-Newton · CC BY-SA 3.0 IGO

Chandra — NASA/CXC/NGST · domínio público

Pulsar (ilustração) — NASA · domínio público

Magnetar (ilustração) — ESO/L. Calçada · CC BY 4.0

Carl Brans — Cfbolner · CC BY-SA 4.0

Thibault Damour — Melirius · CC BY 3.0

PSR J0030+0451: modelos das manchas — NASA's Goddard Space Flight Center · domínio público

Figuras dos artigos (Parte IV) — de Lima et al., ApJ 889, 165 (2020); de Lima et al., JHEAp 42, 52 (2024, CC BY 4.0 no arXiv); Silva et al., Galaxies 11, 18 (2023, CC BY 4.0); Ottoni et al., EPJC 84, 1337 (2024, CC BY 4.0); dos Santos Júnior, de Lima & Moraes, arXiv:2607.09836 (CC0); Pereira et al., PRD 110, 103014 (2024); Zastrow et al., PRD 112, 083010 (2025); Silva, de Lima, Coelho & de Araújo (submetido ao JHEAp, 2026)

Chapa simulada de Sobral — posições do catálogo Tycho-2 (Høg et al., A&A 355, L27, 2000), via VizieR/CDS

Binária Be/X (ilustração) — gerada por IA

Diagrama P–Ṗ — catálogo de pulsares ATNF 2.8.1 (Manchester et al., AJ 129, 1993, 2005)

OBRIGADO

Perguntas?

Slides, animações e dashboards abertos em
rafael-lima.pages.dev/talks

Rafael C. R. de Lima

rafael.lima@udesc.br · rafael-lima.pages.dev